

مراجعة الاستاتيكا

الصف الثالث الثانوى

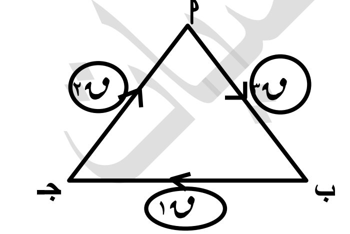
من اعداد الاستاذ/
ربيع فايد معلم خبير الرياضيات بالمرحلة الثانوية

اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

- رد فعل المستوى الاملس عمودى على السطح وإذا كان كروى يمر بالمركز
- قوة الاحتكاك هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على مستو خشن ويكون اتجاهها فى عكس اتجاه الحركة وتزداد قيمتها حتى تصل الى قيمتها العظمى عندما يكون الجسم على وشك الحركة وتسمى بقوة الاحتكاك السكونى النهائى وعندما يتحرك الجسم تقل قوة الاحتكاك وتثبت اثناء الحركة وتسمى بقوة الاحتكاك الحركى
- رد الفعل للمستوى الخشن غير معلوم اتجاهه ويحلل الى مركبيتن احداهما عمودى على اتجاه الحركة والاخرى مع اتجاه الحركة
- زاوية الاحتكاك زاوية محصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل
- معامل الاحتكاك السكونى يساوى النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى السكونى ورد الفعل العمودى
- معامل الاحتكاك السكونى > معامل الاحتكاك الحركى
- معامل الاحتكاك السكونى يعتمد على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس شكليهما ولاكتلتيهما
- رد الفعل المحصل عندما يكون الاحتكاك نهائى = $ر' = ر\sqrt{1+م_س^2}$
- أقصى قيمة ممكنة لقوة الاحتكاك السكونى هى $ع_س = م_س ر$ ، $م_س = ظال$
- قوة الاحتكاك السكونى $ح \leq ح_س$ فى حالة اقل الجسم ساكن وفى حالة التساوى يكون على وشك الحركة
- زاوية الاحتكاك السكونى > زاوية الاحتكاك الحركى
- قوة الاحتكاك فى حالة السطوح الملساء صفر وقد تكون صفر فى السطوح الخشنة فى حالة وضع جسم على سطح خشن ولا تؤثر عليه قوة تحاول تحريكه
- جتا(س+ص)=جتاس جتاص – جاس جاص
- محصلة القوتين $ق_1$ ، $ق_2$ هى $ع^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2ق_1ق_2 جتاي$ ، $ظاهـ = \frac{ق_2 جاي}{ق_1 + ق_2 جتاي}$
- قاعدة لامى $\frac{ق_1}{جاهـ_1} = \frac{ق_2}{جاهـ_2} = \frac{ق_3}{جاهـ_3}$ حيث $هـ_1$ الزاوية المحصورة بين القوتين $ق_2$ ، $ق_3$


خارجين من نفس النقطة ، بالمثل باقى الزاويا

- قاعدة مثلث القوى $\frac{ق_1}{أ} = \frac{ق_2}{ب} = \frac{ق_3}{جـ}$



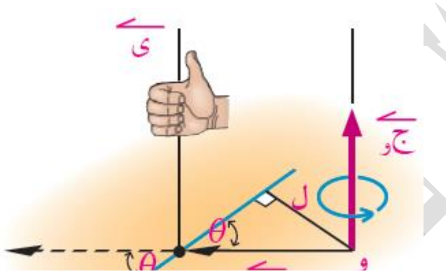
لاحظ الترتيب الدورى للقوى

- مدى جاهـ ، جتاهـ هو [-١ ، ١] ∴ أكبر قيمة لـ جتاهـ =١
- قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة رد الفعل العمودى
- من شروط الاتزان هو انعدام محصلة القوى فى أى اتجاه
-

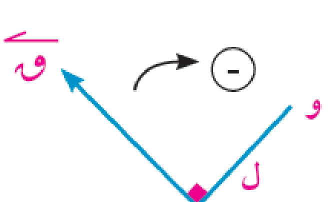
اتزان جسم على مستوى مائل خشن

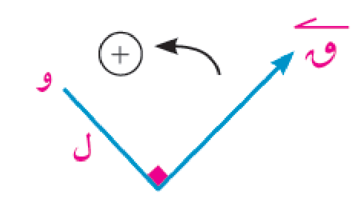
- إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية ميل المستوى على الافقى(هـ) تساوى قياس زاوية الاحتكاك (ل)
- هـ < ل فإن الجسم متزن ، هـ =ل على وشك الانزلاق ، هـ > ل ينزلق
- اتجاه الاحتكاك ضد اتجاه الحركه المتوقع فإذا اثرنا على الجسم بقوة ق وكانت ق
  ① تجعل الجسم على وشك الحركة لاعلى فان الاحتكاك لاسفل
  ② تجعل الجسم على وشك الحركة لاسفل فإن الاحتكاك يكون لاسفل
  ③ تمنع الجسم من الانزلاق فإن الاحتكاك يكون لأعلى
- أقل قوة تؤثر فى الجسم ويبقى متزناً هى القوة التى تمنعه من الانزلاق وفى هذه الحاله يكون اتجاه قوة الاحتكاك النهائى حس الى اعلى المستوى
- أكبر قوة تؤثر فى الجسم ويبقى متزناً هى التى تجعل الجسم على وشكل الحركة الى أعلى ويكون الاحتكاك النهائى الى اسفل المستوى
- إذا كانت $ق_١$ هى أقل قوة تحفظ توازن الجسم أى عندها الجسم على وشك الانزلاق لاسفل ، وكان $ق_٢$ أكبر قوة تحفظ توازن الجسم وعندها يكون الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن قيم ق $\in [ق_١ ، ق_٢]$
- عندما يكون الجسم على وشك الحركة (الانزلاق) يكون الاحتكاك نهائى سكون
- معامل الاحتكاك السكونى > معامل الاحتكاك الحركى
-

عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الابعاد



- $\overrightarrow{جو} = \overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = ||\overrightarrow{ر}|| \; ||\overrightarrow{ق}|| جاθ \overrightarrow{ى}$
- لا يتوقف عزم قوة بالنسبة لنقطة على النقطة على خط عمل القوة
- معيار عزم قوة بالنسبة لنقطة كمية موجبة دائماً
- القياس الجبرى لعزم قوة بالنسبة لنقطة
  =الاشارة فى القوة × زراع القوة
  مع اتجاه عقارب الساعة –
  عكس اتجاه عقارب الساعة +





- القياس الجبرى للعزم قد يكون موجب أو سالب بخلاف معيار العزم موجب
- عزم قوة بالنسبة لاى نقطة على خط عملها = صفر
- إذا كان خط عمل قوة بالنسبة لنقطة =صفر ∴ خط عمل القوة يمر بالنقطة
- إذا كان عزم قوة $\overrightarrow{جب} = \overrightarrow{جج}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ // $\overline{بج}$ ،
- إذا كان عزم قوة $\overrightarrow{جب} = -\overrightarrow{جج}$ فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ ينصف $\overline{بج}$
- وحدة قياس العزم =وحدة قياس القوة × وحدة قياس الطول مثلا نيوتن.متر ، ث.كجم.متر ،....

- يمكن ايجاد عزم قوة بالنسبة لنقطة بتحليل القوة فى اتجاهين متعامدين ثم نوجد مجموع عزمى



مركبتيها حول النقطة (**مبدأ العزوم-نظرية فارينون**)

ففى الشكل المقابل:

عزم $\overrightarrow{ق}$ حول و = $ق_{س}$ حول و + $ق_{ص}$ حول و

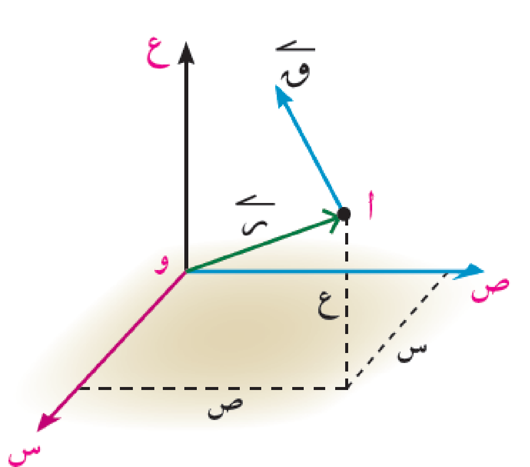
ايهما اسهل نوجد

- **نظرية:** مجموع عزوم عدة قوى فى الفراغ حول نقطة
  يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة
  وتستخدم لمعرفة نقطة تأثير المحصلة أو خط عملها
- **طول العمود من نقطة على خط عمل القوة**
  = معيار العزم ÷ معيار القوة = طول ذراع القوة
- إذا كان عزم قوة بالنسبة لنقطة = $\overrightarrow{0}$ فإن القوة تنعدم أو خط عملها يمر بالنقطة

عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثلاثى الابعاد



- عزم $\overrightarrow{ق}$ =($ق_{س}$ ، $ق_{ص}$ ، $ق_{ع}$) تؤثر فى النقطة
  أ(س ، ص ، ع) التى متجه موضعها بالنسبة لـ و
  هو $\overrightarrow{ر}$ =(س ، ص ، ع)



يساوى $\overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ س & ص & ع \\ ق_{س} & ق_{ص} & ق_{ع} \end{vmatrix}$

=(ص $ق_{ع}$ - ع $ق_{ص}$) $\overrightarrow{س}$ - (س $ق_{ع}$ - ع $ق_{س}$) $\overrightarrow{ص}$ + (س و)

- مركبة العزم حول محور س =(ص $ق_{ع}$ - ع $ق_{ص}$)
- مركبة العزم حول محور ص =-(س $ق_{ع}$ - ع $ق_{س}$)
- مركبة العزم حول محور ع = (س $ق_{ص}$ - ص $ق_{س}$)
-

محصلة القوى المتوازية المستوية

- محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه هى قوة فى اتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما
- محصلة قوتين متوازيتين ومتضادين فى الاتجاه وغير متساويتى المعيار هى قوة فى إتجاه القوة الأكبر معياراً ويساوى الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الاكبر معياراً بنسبة عكسية لمعياريهما

- مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة
- إذا علم المحصلة و احدى القوتين وكانت المحصلة أكبر من القوة ∴ يوجد احتمالان القوتين فى نفس الاتجاه أو متضادين فى الاتجاه
- إذا علم المحصلة واحدى القوتين وكانت المحصلة أصغر من القوة المعلومة ∴ القوتين متضادين فى الاتجاه
- لايجاد محصلة عدة قوى متوازية نفرض متجه وحدة ونوجد المحصلة ولتعين نقطة تأثير المحصلة نستخدم القاعدة: مجموع عزوم القوى حول نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة
-

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

- إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن:
  ❶ مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى(بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفراً
  ❷ مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفراً
- عندما يكون القضيب الموضوع على حاملين على وشك الدوران حول أحد الحاملين فإن رد الفعل ينعدم عند الحامل الآخر
- **قاعدة اذا كانت القوى متوازية ومعلوم نقطة تاثير كل قوة**

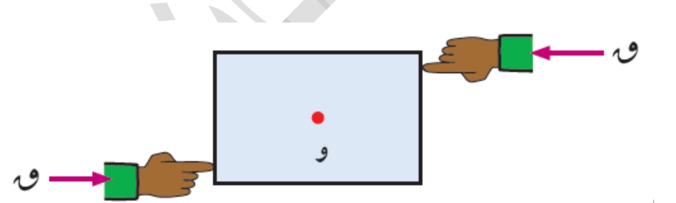
$$\text{س} = \frac{\text{ق}_1\,\text{س}_1 + \text{ق}_2\,\text{س}_2 + \text{ق}_3\,\text{س}_3 + ...}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + ...} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{ق}_1\,\text{ص}_1 + \text{ق}_2\,\text{ص}_2 + \text{ق}_3\,\text{ص}_3 + ...}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2 + \text{ق}_3 + ...}$$

-

اتزان جسم جاسئ

- شرط الاتزان هو محصلة القوى =صفر ، مجموع عزوم القوى حول اى نقطة =صفر
-

الازدواجات



- الازدواج يتكون من قوتين متساويتين فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه ولايجمعهما خط عمل واحد
- معيار عزم الازدواج دائما موجب ويساوى معيار احدى القوتين × البعد العمودى بينهما
- القياس الجبرى لعزم الازدواج قد يكون موجب أو سالب
- الازدواج لا يتزن الا مع ازدواج مثله
- إذا اتزن جسم تحت تأثيرة عدة ازدواجات فان مجموع القياسات الجبرية ينعدم

- شرط تكافؤ ازدواجين إذا كان لهم نفس القياس الجبرى لعزميهما

الازدواج المحصل

- شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج ❶ تنعدم محصلة القوى ❷ مجموع عزوم القوى حول نقطة لا يساوى الصفر
- كذلك شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج تساوى مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة (مقدار ثابت خلاف الصفر)
- كذلك شرط أن المجموعة تكافؤ ازدواج إذا أثرت القوى فى اضلاع مضلع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد وتناسبت مقادير القوى مع اطوال الاضلاع فإن المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه يساوى ضعف مساحة المضلع × عدد الوحدات الممثلة لمقدار القوة
-

مركز الثقل

- مركز ثقل جسم جاسئ هو نقطة ثابتة فى الجسم لا يتغير موضعها مهما تغير وضع الجسم بالنسبة للارض و يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات المكونة للجسم
- عند تعليق الجسم تعليقاً حراً فأن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بمركز الثقل
- مركز ثقل الجسم يغير بتغير شكله
- مركز ثقل مربع ، مستطيل ، متوازى أضلاع منتظم الكثافة هو نقطة تقاطع القطرين(دون كتل عليه)
- مركز صفيحة محدودة بمثلث منتظمة الكثافة هو نقطة تلاقى متوسطاته
- نقطة تلاقى متوسطات المثلث الذى رؤسه ؟(س١،ص١) ،ب(س٢، ص٢) ،جـ(س٣،ص٣) هى $\left(\frac{س_1+س_2+س_3}{٣} ، \frac{ص_1+ص_2+ص_3}{٣}\right)$
- فى الاشكال منتظمة الكثافة الاطوال تتناسب مع الكتل كذلك المساحات تتناسب مع الكتل
- فى التمارين التي يذكر فيها تعليق الجسم تعليقا حرا من احدي نقطة فيفضل ان تكون هذة النقطة هي نقطة الأصل للمحورين المتعامدين
-

طريقة الكتلة السالبة

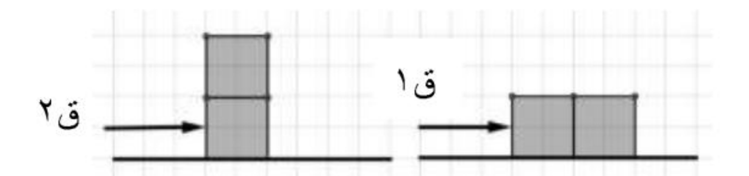
- نطبق القواعد السابقة مع وضع الكتلة التى رفعت بالسالب
- مركز ثقل اى شكل له محور تماثل يقع عليه

اولا:الاسئلة الموضوعية(أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة)

(بوكلت ١)

[١] اراحت سيارة صعود منحدر يميل على الافقى بزاوية قياسها ٤٥ فإن معامل الاحتكاك السكونى بين عجلات السيارة والمنحدر يجب الا يقل عن .... ($\frac{1}{2}$ ، ١ ، ٢ ، صفر)

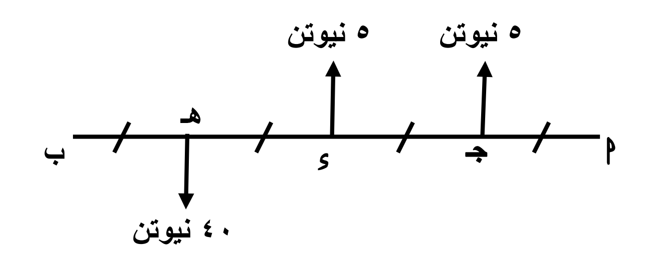
[٢] الشكلان الاتيان يوضحان قالبان متساويان فى الكتلة والحجم موضوعان على مستوى افقى خشن فى وضعين مختلفين اثرت عليهم قوة ق لتجعلهم على وشك الحركة فإن ....



(أ) $ق_1 < ق_2$ (ب) $ق_1 > ق_2$

(جـ) $ق_1 = ق_2$ (د) لايمكن المقارنة

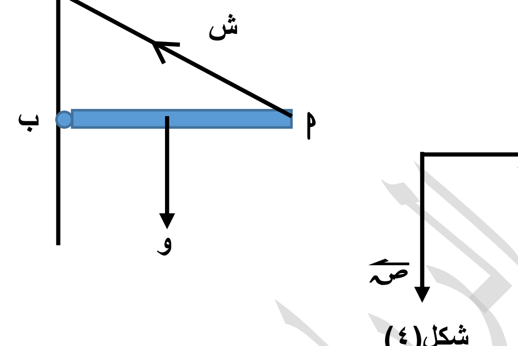
[٣] فى الشكل المقابل:



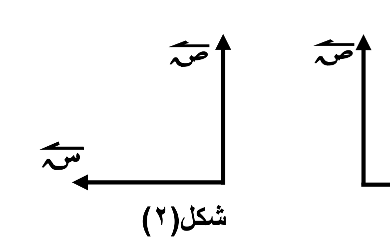
نقطة تأثير محصلة القوى تنتمى الى

($\overline{أجـ}$ ، $\overline{جـء}$ ، $\overline{ءهـ}$ ، $\overline{هـب}$)

[٤] الشكل المقابل يمثل قضيب متزن



، فإن اتجاهات مركبات رد فعل المفصل عند ب تكون:



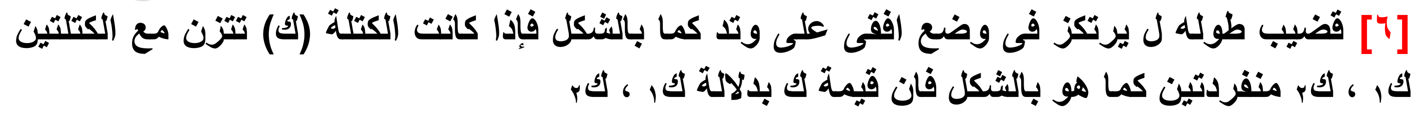


[٥] اكبر عزم للقوة ق بالنسبة لنقطة أ عندما θ تساوى ....

٢٤سم θ ق أ

(صفر ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، 2π)

[٦] قضيب طوله ل يرتكز فى وضع افقى على وتد كما بالشكل فإذا كانت الكتلة (ك) تتزن مع الكتلتين ك١ ، ك٢ منفردتين كما هو بالشكل فان قيمة ك بدلالة ك١ ، ك٢



($ك_1 + ك_2$ ، $\frac{1}{2}(ك_1 + ك_2)$ ، $ك_1 ك_2$ ، $\sqrt{ك_1 ك_2}$)

[٧] فى الشكل المقابل:

إذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك

بين الارض والقضيب فإن:

ظاهـ × ظال = ... (٣ ، ٢ ، ١ ، ١/٢)

[٨] اذا كان نظام القوى المقابل يكافئ ازدواج

فان ق = ... نيوتن (٣ ، ٧ ، ١٠ ، ١٧)

[٩] اذا كانت القوتان ق١ = ٥ سَ + أ صَ + ٣ عَ ، ق٢ = ب سَ - ٩ صَ + جـ عَ

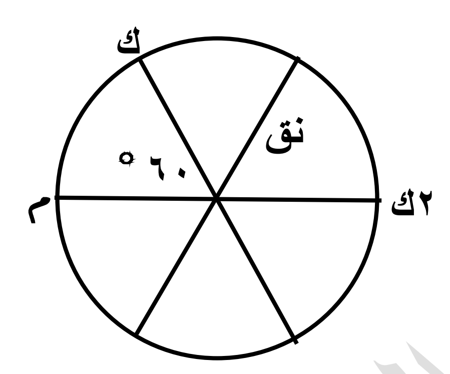
تكونان ازدواج فإن أ + ب + جـ = ... (-١ ، صفر ، ١ ، ١٧)

[١٠] الشكل المقابل يمثل عجلة مهملة الكتلة طول نصف قطرها (نق)

يمكنها الدوران فى مستوى رأسى حول عمود افقى املس ثبت عليها

ثلاث كتل مقدارها ك ، ٢ك ، م فاذا اتزنت العجلة كما بالشكل

فإن قيمة م بدلالة ك (١/٢ ك ، ك ، ٣/٢ ك ، ٢ك)



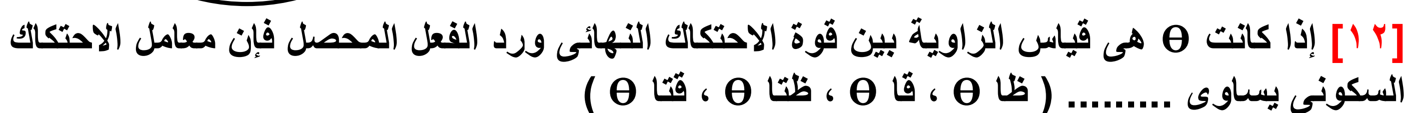
[١١] الشكل المقابل يبين قرص دائرى مركزه م ،

ثقب ثقبان دارئريان مركزاهما م١ ، م٢ وطولا نصفى

قطريهما ٣سم ، ٢سم على الترتيب فإن مركز ثقل الجزء

المتبقى يقع على ...... (م١م٢ ، مم٢ ، م١أ ، م٢ب)

(بوكلت٢)



[١٢] إذا كانت θ هى قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى .... (ظا θ ، قا θ ، ظتا θ ، قتا θ)

[١٣] قوة ق = سَ - ٢صَ تؤثر فى أ(٣ ، ١) فإن القياس الجبرى لعزم القوة ق بالنسبة لنقطة الاصل يساوى .... (٧ ، -٧ ، ٧ عَ ، -٧ عَ)

[١٤] إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ // $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، $||\overrightarrow{ق_2}||$ = ١٠ وحدة قوة فإن ، $\overrightarrow{ق_2}$ يمكن أن تكون .... (-٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ ، ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ ، -٦ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ ، -٦ $\overrightarrow{س}$ - ٨ $\overrightarrow{ص}$)

[١٥] إذا كان ب منتصف $\overline{أجـ}$ ، $ع_{ب}$ = $\overrightarrow{0}$ ، $ع_{أ}$ = ١٢ $\overrightarrow{ع}$ فإن $ع_{جـ}$ = ...

(١٢ ، ١٢ $\overrightarrow{ع}$ ، -١٢ ، -١٢ $\overrightarrow{ع}$)

[١٦] قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تؤثر فى $\overline{ب جـ}$ حيث أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٦سم فإن معيار عزم القوة بالنسبة لنقطة د يساوى .... نيوتن.سم (٦٠ ، ١٢٠ ، ٦٠$\sqrt{2}$ ، ١٢٠$\sqrt{2}$)

[١٧] قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارهما $ق_1$ ، $ق_2$ نيوتن ، فإذا كان $ق_1$: $ق_2$ = ١ : ٢ محصلتهما ١٥ نيوتن فإن $ق_2$ - $ق_1$ = ... نيوتن (٥ ، ١٠ ، ١٥ ، صفر)

[١٨] مركز ثقل جسمين ماديين كتلة كل منهما ٣ ، ٦ نيوتن والمسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة .... سم (٥ ، ٧,٥ ، ١٠ ، ٧)

[١٩] إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ = ب $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = -٣ $\overrightarrow{س}$ + جـ $\overrightarrow{ص}$ قوتى ازدواج فإن ب – جـ =......

(١ ، -١ ، ٥ ، -٥)

[٢٠] مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الاضلاع رؤوسه أ(١ ، ٢) ،

ب(-١ ، ٠) ، جـ (٣ ، ١) هو النقطة .... [(١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)]

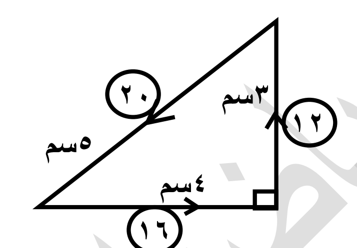
[٢١] إذا كانت مجموعة من القوى محصلتها ح وتكافئ ازدواج معيار عزمه ج فإن ....

(أ) $\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{ج}$ = $\overrightarrow{0}$ (ب) $\overrightarrow{ح}$ ≠ $\overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{ج}$ = $\overrightarrow{0}$

(جـ) $\overrightarrow{ح}$ = $\overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{ج}$ ≠ $\overrightarrow{0}$ (د) $\overrightarrow{ح}$ ≠ $\overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{ج}$ ≠ $\overrightarrow{0}$

[٢٢] فى الشكل المقابل:

عزم الازدواج المحصل = ... وحدة عزم (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨)



[٢٣] إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ك $\overrightarrow{ص}$ + ٤ $\overrightarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة أ(١ ، ٠ ، -١) وكان عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة ب(٢ ، -١ ، ٣) يساوى -٤ $\overrightarrow{س}$ -٨ $\overrightarrow{ص}$ – $\overrightarrow{ع}$

فإن قيمة ك = ... (٢ ، -٢ ، ٠ ، -٨)

(**بوكلت٣**)

[٢٤] إذا كانت القوة $\overrightarrow{ق}$ =(٢ ، -٣ ، ٤) تؤثر فى النقطة (١ ، ١ ، ١) فإن مركبة عزم $\overrightarrow{ق}$ حول محور س تساوى .... (-٥ ، -٢ ، ٢ ، ٧)

[٢٥] مثّلت ثلاث قوى تمثيلا تاماً بأضلاع مثلث متساوى الأضلاع ٢ ب جـ مأخوذة فى ترتيب دورى واحد وبمقياس رسم ١سم لكل ٢ ث جم فإذا كان طول ضلع المثلث يساوى ٣٠ سم فإن معيار عزم الازدواج يساوى .... ث جم.سم ($٩٠٠\sqrt{٣}$ ، $١٨٠٠\sqrt{٣}$ ، $٤٥٠\sqrt{٣}$ ، ٩٠٠)

[٢٦] بعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢سم عن أحد رؤوس المثلث يساوى .... سم ($٢\sqrt{٣}$ ، $٤\sqrt{٣}$ ، ٦ ، $٦\sqrt{٣}$)

[٢٧] إذا كانت النقط ٢ ، ب، جـ فى مستوى مجموعة من القوى وكان $\overleftarrow{جـ_١}$ = ٢٠ $\overleftarrow{ع}$ ، $\overleftarrow{جـ_ب}$ = $\overleftarrow{٠}$

، $\overleftarrow{جـ_جـ}$ = -١٠ $\overleftarrow{ع}$ فإن ....

(أ) المجموعة متزنة   (ب) المحصلة تنصف $\overline{٢جـ}$

(جـ) ب ∋ خط عمل المحصلة   (د) المحصلة توازى $\overleftrightarrow{٢جـ}$

[٢٨] إذا اتصل قضيب بأحد طرفيه فى حائط رأسى وكانت س ، ص هما المركبتين الجبريتين لقوة رد فعل المفصل وكانت س=٥ نيوتن ، ص = ١٢ نيوتن فإن مقدار قوة رد فعل المفصل = ... نيوتن

(٧ ، ١٣ ، ١٧ ، ٦٠)

[٢٩] إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ - ٤$\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة ٢(١ ، ٢) فإن بعد نقطة الأصل و(٠ ، ٠) عن خط عملها يساوى .... وحدة طول ($\sqrt{٥}$ ، ٢ ، ٥ ، ١٠)

[٣٠] إذا كانت محصلة القوتان المتوازيتان ٧ $\overleftarrow{ى}$ ، ٥ $\overleftarrow{ى}$ نيوتن تؤثر فى نقطة تبعد $٢\frac{١}{٣}$ متر عن خط عمل القوة الصغرى فإن المسافة بين خطى عمل القوتين = ... متر ($\frac{٤٩}{١٥}$ ، $\frac{٢٨}{٥}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ٤)

[٣١] إذا كانت مس ، مك هما معاملى الاحتكاك السكونى والحركى على الترتيب لجسمين متلاسمين

فإن .... ($م_س > م_ك$ ، $م_س < م_ك$ ، $م_س = م_ك$ ، لاتوجد علاقة بينهما)

[٣٢] إذا كانت $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة

$\overleftarrow{ق}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣$\overleftarrow{ص}$ – $\overleftarrow{ع}$ تؤثر فى النقطة ٢(١ ، -١ ، ٤) فإن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول

نقطة ب(٢ ، -٣ ، ١) تساوى ....

(أ) ١١ $\overleftarrow{س}$ - ٥$\overleftarrow{ص}$ - ٧ $\overleftarrow{ع}$ (ب) ١١ $\overleftarrow{س}$ - ٥$\overleftarrow{ص}$ + ٧ $\overleftarrow{ع}$

(جـ) -١١ $\overleftarrow{س}$ - ٥$\overleftarrow{ص}$ - ٧ $\overleftarrow{ع}$ (د) -١١ $\overleftarrow{س}$ +٥$\overleftarrow{ص}$ - ٧ $\overleftarrow{ع}$

[٣٣] إذا كان خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ينصف $\overline{٢ب}$ حيث ٢(٣ ، ٢) وكانت ء(١ ، ٣) منتصف $\overline{٢ب}$ فإن $\overleftarrow{جـ_ب}$ = ... $\overleftarrow{ع}$ (-٣ ، ٣ ، -٦ ، ٦)

(بوكلت ٤)

[٣٤] جسم وزنه ٢$\sqrt{٣}$ ث كجم موضع على مستوى أفقى خشن أثرت عليه قوة أفقيه مقدارها ٢ ث كجم فجعلته على وشك الحركة فإن مقدار قوة رد الفعل المحصل = ... ث كجم (٢ ، ٨ ، ٤ ، ٨$\sqrt{٣}$)

[٣٥] قوتان متوازيتان تؤثران فى جسم متماسك كبراهما ٨ ث كجم تؤثر فى نقطة ؍ والصغرى تؤثر فى نقطة ب ومحصلتهما ١٢ ث كجم تؤثر فى نقطة جـ حيث جـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{؍ب}}$ فإذا كان ب جـ =٦سم فإن طول $\overline{\text{؍ب}}$= ....سم (٣ ، ٩ ، ١٨ ، ١٨$\sqrt{٣}$)

[٣٦] الشكل المقابل يوضح مجموعة من القوى تؤثر فى النقط ؍ ، ب ، جـ ، ء تقع على مستقيم أفقى فاذا كانت هذه المجموعة تؤول الى ازدواج قياسه الجبرى = ٣٦ نيوتن.سم

فإن ق١ + ق٢ = ...

(أ) ١٢ (ب) ١٦

(جـ) ١٨ (د) ٢٤

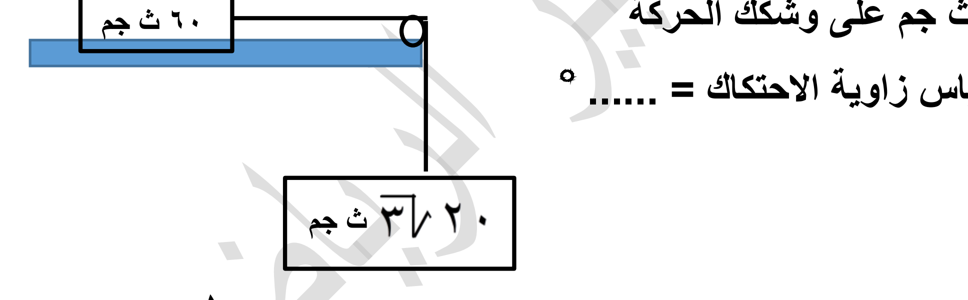
[٣٧] إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ - ٤$\overrightarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة ؍(٠ ، ٢) وكانت جـ(٢ ، ٣) ، هـ(٥ ، -١)

فإن خط عمل $\overrightarrow{ق}$ .... $\overleftrightarrow{\text{جـهـ}}$ (عمودى على ، يقطع ، يوازى ، يخالف)

[٣٨] فى الشكل المقابل:

اذا كان الجسم الذى وزنه ٦٠ ث جم على وشك الحركة على مستوى افقى خشن فإن قياس زاوية الاحتكاك = ... °

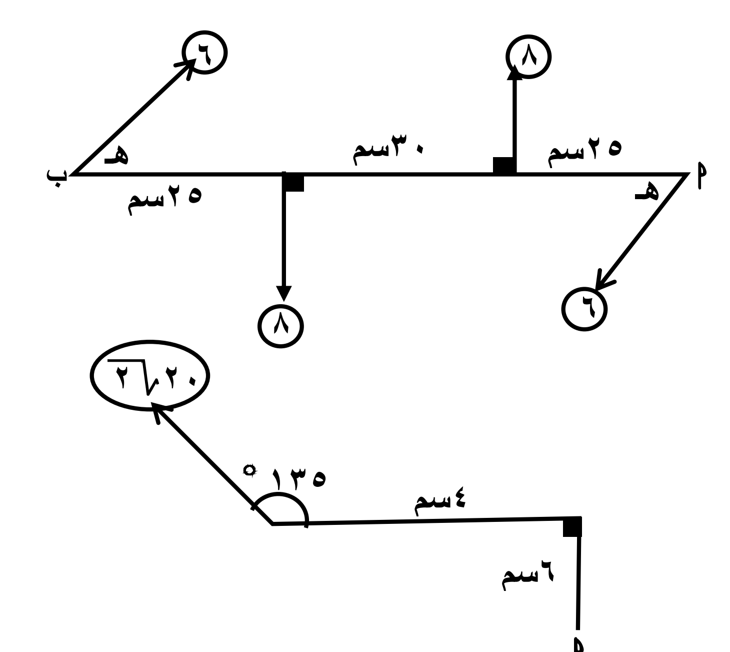
(٦٠ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٤٥)



[٣٩] فى الشكل المقابل عصا مكونه من قضيب منتظم $\overline{\text{؍ب}}$ طوله ٨٠ سم ووزنه $\frac{١}{٢}$ ث كجم ، كرة حديديه منتظمة وزنها ١ ث كجم مثبته عند الطرف ؍ طول نصف قطرها ٥سم فإن بعد مركز ثقل العصا عن ب يساوى .... سم (٦٠ ، ٥٠ ، ٧٠ ، ٨٠)

[٤٠] مركز ثقل النظام التالى : ك$_{١}$ = ١ عند النقطة(٢ ، ٣) ، ك$_{٢}$ = ٤ عند (-٢ ، ١)

، ك$_{٣}$=٥ عند (٠ ، ١) هو .... [$\frac{٣}{٥}$ (-١ ، ٢) ، (٢ ، -١) ، $\frac{٣}{٥}$(١ ، -٢) ، (-١ ، -٢)]



[٤١] فى الشكل المقابل:

أربعة قوى تمثل ازدواجين متزنين

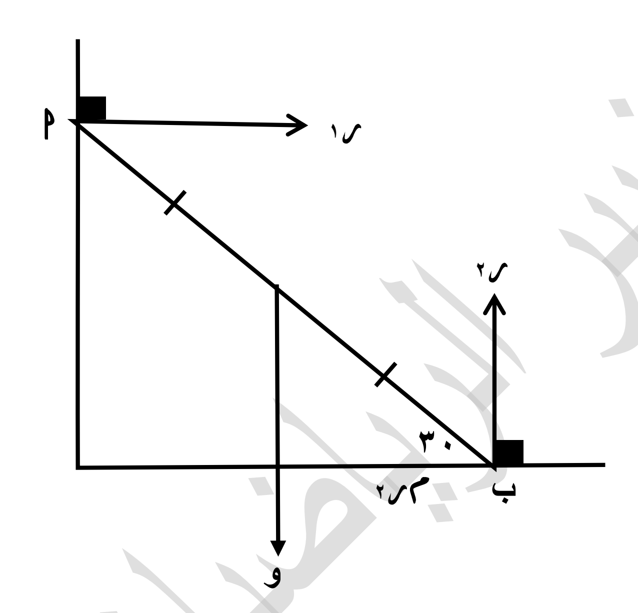
فإن ق(∠هـ) = ... ° (٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ١٥)

[٤٢] فى الشكل المقابل:

القوة ٢٠√٢ نيوتن تؤثر فى النقطة جـ فإن عزم القوة

حول النقطة م يساوى .... نيوتن.سم

(٦٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٤٥)



[٤٣] فى الشكل المقابل: م ب قضيب على وشك الحركة

، ر$_{١}$=٨√٣ نيوتن فإن مقدار ر$_{٢}$ = ... نيوتن

(أ) ٨

(ب) ١٦

(جـ) ١٨

(د) ٨√٣

اجابات الاسئلة الموضعية

(١) ١	(٢) $ى_{١} = ى_{٢}$	(٣) $\overline{هـ ب}$
(٤) شكل(١)	(٥) $\frac{\pi}{٢}$	(٦) $\sqrt{ك_{١} ك_{٢}}$
(٧) ٠,٥	(٨) ٣	(٩) ١
(١٠) $\frac{٣}{٢}$ ك	(١١) $م م_{٢}$	(١٢) ظتا θ
(١٣) $-٧ \overleftarrow{ع}$	(١٤) $-٦ \overleftarrow{س} + ٨ \overleftarrow{ص}$	(١٥) $-١٢ \overleftarrow{ع}$
(١٦) ١٢٠	(١٧) ٥	(١٨) ١٠
(١٩) ٥	(٢٠) (١ ، ١)	(٢١) (جـ)
(٢٢) ٤٨	(٢٣) -٢	(٢٤) ٧
(٢٥) $٩٠٠\sqrt{٣}$	(٢٦) $٤\sqrt{٣}$	(٢٧) (جـ)
(٢٨) ١٣	(٢٩) ٢	(٣٠) $\frac{٥}{٣}$
(٣١) $م_{س} > م_{ك}$	(٣٢) (د)	(٣٣) ٦
(٣٤) ٤	(٣٥) ٩	(٣٦) ١٢
(٣٧) توازى	(٣٨) ٣٠°	(٣٩) ٧٠
(٤٠) $\frac{٣}{٥}$ (-١ ، ٢)	(٤١) ٣٠°	(٤٢) ٤٠
(٤٣) ١٦	(٤٤)	(٤٥)
(٤٦)	(٤٧)	(٤٨)
(٤٩)	(٥٠)	(٥١)
(٥٢)	(٥٣)	(٥٤)
(٥٥)	(٥٦)	(٥٧)
(٥٨)	(٥٩)	(٦٠)

ثانيا:الاسئلة المقالية

(بوكلت ١)

[١] فى الشكل المقابل:

أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة




بفرض المحصلة تبعد س سم عن م ∴ ح = ٨ – ١- ٥ = ٢ نيوتن

∴ مجموع عزوم القوى حول م = عزم المحصلة حول م

∴ ٨× ٢ – ١×١ = ٢× س ∴ س=٧,٥ سم

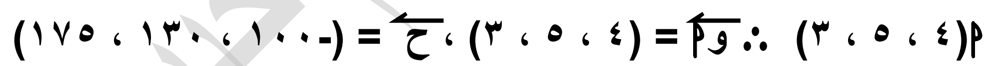
∴ المحصلة تبعد عن م مسافة ٧,٥ سم ومقدارها ٢ نيوتن لاعلى

[٢] فى الشكل المقابل:

ق١ = ١٠٠ س - ١٢٠ ص + ٧٥ ع نيوتن

، ق٢ = -٢٠٠ س + ٢٥٠ ص + ١٠٠ ع نيوتن

تؤثران فى نقطة م أوجد مجموع عزوم القوى حول النقطة و


م(٤ ، ٥ ، ٣) ∴ و م = (٤ ، ٥ ، ٣) ، ح = (-١٠٠ ، ١٣٠ ، ١٧٥)

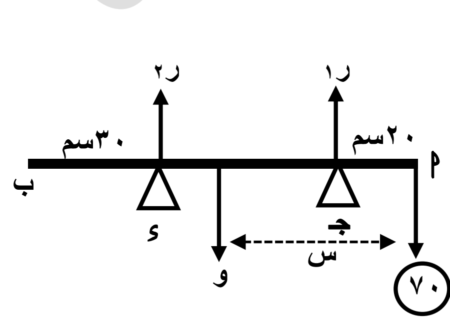
جو = و م × ح =
س	ص	ع
٤	٥	٣
-١٠٠	١٣٠	١٧٥

= ٤٨٥ س - ١٠٠٠ ص + ١٠٢٠ ع

[٣] م ب قضيب غير منتظم وزنه (و) نيوتن وطوله ١٥٠ سم يرتكز فى وضع أفقى على وتدين جـ ، ى بحيث كان م جـ =٢٠سم ، ب ى = ٣٠ سم لوحظ أن القضيب يكون على وشك الدوران حول ى إذا علق من ب ثقل قدره ٢٠ نيوتن ويكون على وشك الدوران حول جـ إذا علق من م ثقل قدره ٧٠ نيوتن

أوجد وزن القضيب وعين نقطة تأثير الوزن



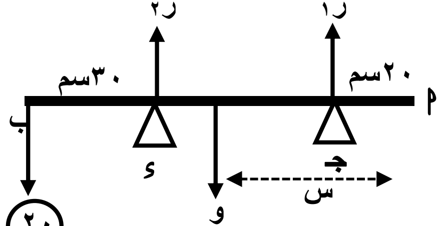


عندما يكون على وشك الدوران حول جـ

ر٢=٠ ، ر١ = ٧٠ + و ، جم = ٠

و× س - ر١ × ٢٠ =٠ ∴ و× س = ١٤٠٠ + ٢٠و ⇐ (١)

عندما يكون على وشك الدوران حول ء



ر١=٠ ، ر٢= ٢٠ + و ⟸ (٣) ، ج‌م = ٠

و × س + ٢٠ × ١٥٠ – ر٢×١٢٠ = ٠

∴ و × س = ٢٤٠٠ + ١٢٠ و – ٣٠٠٠ ∴ و×س = ١٢٠و – ٦٠٠ ⟸ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ١٤٠٠ +٢٠و =١٢٠و – ٦٠٠ ∴ و = ٢٠ نيوتن

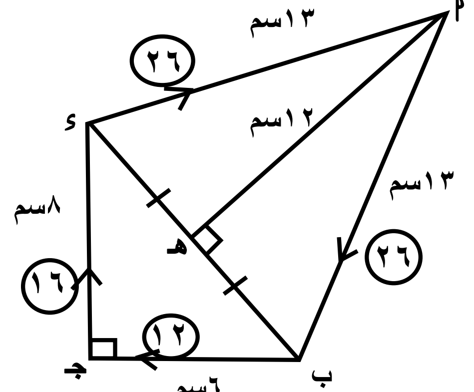
بالتعويض فى(١) ∴ ٢٠س =١٤٠٠ + ٢٠ × ٢٠ ∴ س =٩٠ سم

∴ وزن القضيب ٢٠ نيوتن ويبعد عن م مسافة ٩٠ سم

[٤] م ب جـ ء شكل رباعى فيه م ب = م ء =١٣سم ، ب جـ =٦سم ، جـ ء =٨سم ، ق(∠جـ) =٩٠°

اثرت قوى مقاديرها ٢٦ ، ١٢ ، ١٦ ، ٢٦ فى اتجاهات م ب ، ب جـ ، جـ ء ، ء م على الترتيب

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه



من هندسة الشكل ب ء = ١٠سم ، م هـ = ١٢سم

∵ القوى تؤثر فى اضلاع الشكل الرباعى فى اتجاه دورى واحد

، $\frac{٢٦}{١٣} = \frac{١٢}{٦} = \frac{١٦}{٨} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ضعف مساحة الشكل × م

= ٢($\frac{١}{٢}$ ×٦×٨ + $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٢) × ٢ = ٣٣٦ وحدة عزم

[٥] قضيب منتظم وزنه ٤ ث كجم يرتكز بطرفه م على مستوى رأسى أملس وبطرفه ب على مستوى أفقى أملس ، حفظ القضيب من الانزلاق بواسطة خيط ربط أحد طرفيه بنقطة على خط تقاطع المستويين رأسياً أسفل م وبطرفه الآخر فى نقطة جـ على القضيب حيث جـ ب = $\frac{١}{٥}$ م ب فإذا كان القضيب يصنع فى وضع التوازن مع الافقى زاوية قياسها ٤٥° فأثبت أن الخيط يصنع مع الافقى زاوية ظلها $\frac{١}{٤}$

أوجد قيمة الشد فى الخيط وقيمة رد فعل كل من المستويين على القضيب



بفرض طول القضيب م ب = ١٠ ل ∴ جـ ب = ٢ل ، ب ء = م ء = ٥ $\sqrt{٢}$ ل

∴ جـ س = ب س = $\sqrt{٢}$ ل ∴ س ء = ٤ $\sqrt{٢}$ ل

∴ ظا θ = $\frac{جس}{سء} = \frac{\sqrt{٢}ل}{٤\sqrt{٢}ل} = \frac{١}{٤}$ ∴ فى حالة الاتزان القضيب يصنع مع الافقى زاوية ظلها $\frac{١}{٤}$

∵ القضيب متزن ∴ محصلة القوى تنعدم ، مجموع عزوم القوى حول اى نقطة = صفر

وبتحليل قوة الشد كما بالشكل ∴ $ر_٢$ = ٤ + ش جاθ ⇐ (١)

$ر_١$ = ش جتاθ ⇐ (٢) ، ∵ جء = ٠

∴ -٤ × $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ ل − $ر_١$ × ٥$\sqrt{٢}$ ل + $ر_٢$×٥$\sqrt{٢}$ ل = ٠ ÷ ٥$\sqrt{٢}$ ل

∴ -٢ − ش جتاθ + ٤ + ش جاθ =٠

∴ ٢ + ش (جاθ − جتاθ) =٠ ⇐ (٣)

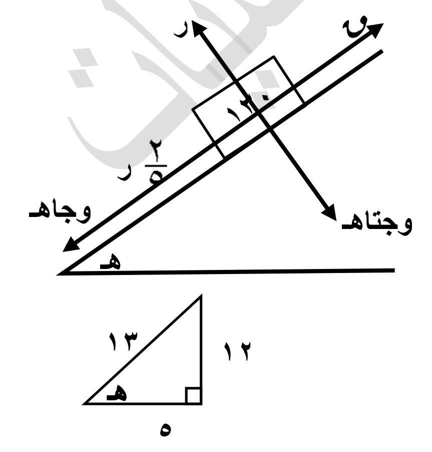
∴ ٢ + ش ($\frac{١}{\sqrt{١٧}} - \frac{٤}{\sqrt{١٧}}$) = ٠


∴ ش = $\frac{٢\sqrt{١٧}}{٣}$ ث كجم بالتعويض فى (١) ، (٢)

∴ $ر_١$ = $\frac{٢\sqrt{١٧}}{٣} \times \frac{٤}{\sqrt{١٧}} = \frac{٨}{٣}$ ث كجم ، $ر_٢$ = ٤ + $\frac{٢\sqrt{١٧}}{٣} \times \frac{١}{\sqrt{١٧}} = \frac{١٤}{٣}$ ث كجم

(بوكلت ٢)

[٦] وضع جسم وزنه ١٣٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الافقى بزاوية جيبها $\frac{١٢}{١٣}$ واثرت عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{٢}{٥}$ فأوجد النهايتين العظمى والصغرى لمقدار القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى

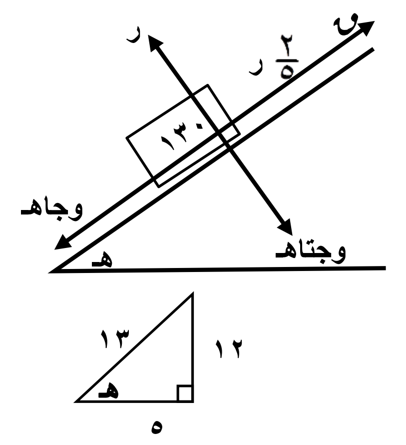


اولا: اقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لاعلى

∴ ر = و جتاهـ = $\frac{٥}{١٣}$ × ١٣٠ = ٥٠ نيوتن

، ق = $\frac{٢}{٥}$ر + وجاهـ = $\frac{٢}{٥}$×٥٠ + ١٣٠ × $\frac{١٢}{١٣}$ = ١٤٠ نيوتن

ثانيا: اقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة لاسفل



∴ ر = و جتاهـ = ١٣٠ × $\frac{٥}{١٣}$ = ٥٠ نيوتن

، ق + $\frac{٢}{٥}$ر = وجاهـ

∴ ق = ١٣٠ × $\frac{١٢}{١٣}$ − $\frac{٢}{٥}$×٥٠ = ١٠٠ نيوتن

∴ ق ∈ [١٠٠ ، ١٤٠]

[٧] تؤثر القوتان المتوازيتان $\overrightarrow{ق_١}$ = ٢ سَ − ٣ صَ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فى النقطتين أ(١ ، ٣) ، ب(٤ ، ٩) على الترتيب فإذا كانت محصلة القوتين تؤثر فى نقطة جـ (٣ ، ٧) فاوجد $\overrightarrow{ق_٢}$

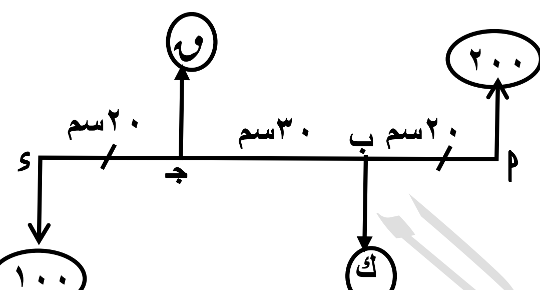


∵ القوتان متوازيتان ∴ نفرض $\overrightarrow{ق_٢}$ = (٢ك ، −٣ك) ∴ مجموع عزوم القوتين حول جـ ينعدم

∴ (−٢ ، −٤) × (٢ ، −٣) + (١ ، ٢) × (٢ك ، −٣ك) = $\vec{0}$

∴ ٦+٨ −٣ك − ٤ك = ٠ ∴ ك = ٢ ∴ $\overrightarrow{ق_٢}$ = (٤ ، −٦) = ٤ سَ − ٦ صَ

[٨] الشكل المقابل يوضح مجموعة من القوى المؤثرة بالنيوتن على قضيب $\overline{أء}$ أوجد ق ، ك فى الحالات التالية:



❶ المجموعة متزنة

❷ محصلة هذه القوى ٣٠٠ نيوتن وتبعد عن أ مسافة ٤٠سم وتؤثر لأعلى وتقع بين أ ، ء



❶ ∵ المجموعة متزنة ∴ ق = ك − ١٠٠ ⇐ (١) ،

$جـ_ب$ = ٠ ∴ ١٠٠×٥٠ + ٢٠٠×٢٠ − ق×٣٠ = ٠ ∴ ق = ٣٠٠ نيوتن ، ك = ٤٠٠ نيوتن

❷ ٣٠٠ = ٢٠٠ + ق − ك − ١٠٠ ∴ ق − ك = ٢٠٠ ⇐ (١)

∴ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول نفس النقطة

∴ ك × ٢٠ + ١٠٠ × ٧٠ − ق × ٥٠ = −٣٠٠ × ٤٠ ∴ ك − ٢,٥ ق = −٩٥٠ ⇐ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ق = ٥٠٠ نيوتن ، ك = ٣٠٠ نيوتن

[٩] ﻡ ب قضيب غير منتظم طوله متر يتزن من منتصفه إذا علق ثقل قدره ٣٠٠ ث جم من نقطة جـ التى تبعد عن ﻡ مسافة ٢٠ سم ، وثقل قدره ٤٠٠ ث جم من نقطة ء والتى تبعد عن ب مسافة ١٥ سم وإذا زاد الثقل عند ء حتى أصبح ٨٨٠ ث جم فإن القضيب يتزن من نقطة تبعد عن ب مسافة ٤٠ سم

أوجد موضع تأثير ثقل القضيب ومقدار وزنه



بفرض أن وزن القضيب (و) يؤثر فى نقطة

تبعد (س) سم عن ﻡ

فى الحالة الاولى :

جـهـ = ٠ ∴ ٣٠٠- × ٣٠ – و (٥٠ – س) + ٤٠٠×٣٥ =٠ ∴ ٥٠ و – وس = ٥٠٠٠ ⇐ (١)

فى الحالة الثانية :

جـهـ = ٠

∴ ٣٠٠- × ٤٠ – و (٦٠ – س) + ٨٨٠×٢٥ =٠

∴ ٦٠ و – وس = ١٠٠٠٠ ⇐ (٢) بالطرح

١٠ و = ٥٠٠٠ ∴ و = ٥٠٠ ث جم بالتعويض فى (١)

∴ ٥٠×٥٠٠ – ٥٠٠س =٥٠٠٠ ∴ س = ٤٠ سم

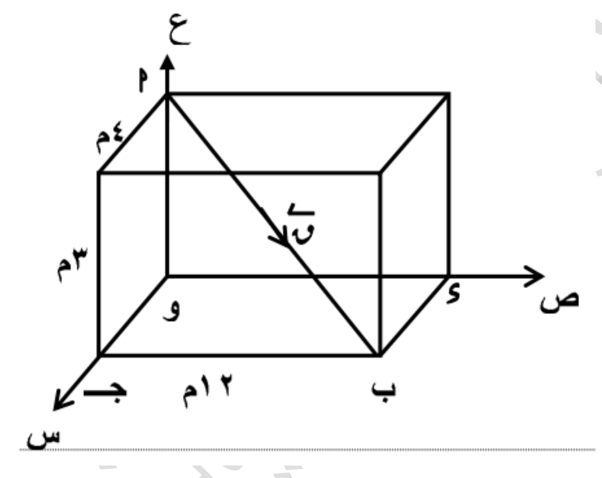
∴ وزن القضيب ٥٠٠ ث جم ويبعد عن ﻡ مسافة ٤٠ سم

[١٠] فى الشكل المقابل:

قوة $\overleftarrow{ق}$ مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر فى القطر

$\overline{ﻡ ب}$ فى متوازى مستطيلات ابعاده ٣ م ، ٤م ، ١٢م

كما بالشكل أوجد عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ حول النقطة ء





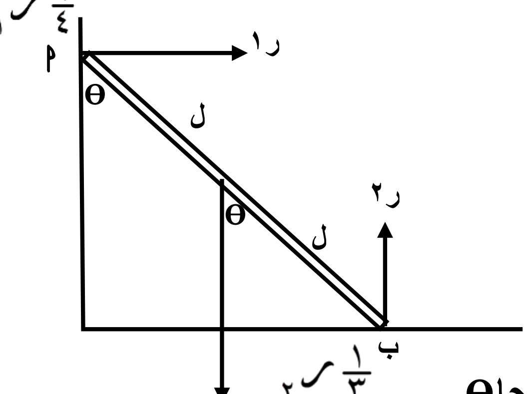
ﻡ(٠ ، ٠ ، ٣) ، ب(٤ ، ١٢ ، ٠) ، ء (٠ ، ١٢ ، ٠) ∴ $\overleftarrow{ﻡ ب}$ = (٤ ، ١٢ ، -٣)

، $\overleftarrow{ءﻡ}$ =(٠ ، -١٢ ، ٣) ∴ $\overleftarrow{ق}$ = ١٣٠ × $\frac{(٤ ، ١٢ ، -٣)}{\sqrt{٩+١٦+١٤٤}}$ = (٤٠ ، ١٢٠ ، -٣٠)

$$\therefore \overrightarrow{جـ_ء} = \overrightarrow{ءم} \times \overrightarrow{ق} = (٠ ، -١٢ ، ٣) \times (٤٠ ، ١٢٠ ، -٣٠) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٠ & -١٢ & ٣ \\ ٤٠ & ١٢٠ & -٣٠ \end{vmatrix}$$

$$= ١٢٠ \overrightarrow{ص} + ٤٨٠ \overrightarrow{ع}$$

[١١] قضيب منتظم وزنه (و) يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة وكان معامل الاحتكاك بين القضيب والحائط $\frac{١}{٤}$ ومعامل الاحتكاك بين القضيب والارض $\frac{١}{٣}$ فإذا اتزن القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط فأوجد ظل زاوية ميل القضيب على الرأسى عندما يكون القضيب على وشك الانزلاق



$\because$ القضيب على وشك الانزلاق ، بفرض طول القضيب=٢ل

$\therefore ر_١ = \frac{١}{٣} م_٢$ ، $ر_٢ + \frac{١}{٤} م_١ = و \Leftarrow (١)$

، $جـ_ب = ٠$

$\therefore و \times ل جا \theta - ر_١ \times ٢ل جتا\theta - \frac{١}{٤} م_١ \times ٢ل جا\theta = ٠ \quad \div ل جا\theta$

$\therefore و - ٢ر_١ ظتا \theta - \frac{١}{٢} م_١ = ٠ \Leftarrow (٢)$

من (١) $\therefore ر_٢ + \frac{١}{١٢} م_٢ = و \quad \therefore ر_٢ = \frac{١٢}{١٣}$ و $\quad \therefore ر_١ = \frac{٤}{١٣}$ و بالتعويض فى (٢)

$\therefore و - ٢ ظتا \theta \times \frac{٤}{١٣} و - \frac{٢}{١٣} و = ٠ \quad \div و \quad \therefore ١ - ٢ ظتا \theta \times \frac{٤}{١٣} - \frac{٢}{١٣} = ٠$

$\therefore ظتا \theta = \frac{١١}{٨} \quad \therefore ظا \theta = \frac{٨}{١١}$

[١٢] م ب جـ ء متوازى أضلاع فيه مء = ١٦سم ، مساحته ١٦٠ سم^٢ وأثرت قوى مقاديرها ٥ ، ٨ ، ٥ ، ٨ نيوتن فى $\overrightarrow{م ب}$ ، $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ ، $\overrightarrow{م ء}$ على الترتيب فإذا كان ق(∠جـ) = θ أوجد:

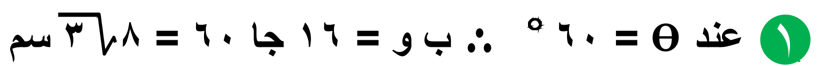
❶ معيار عزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ نيوتن عندما $\theta = ٦٠°$

❷ قيمة θ إذا كان معيار عزم الازدواج المحصل يساوى ٤٠ نيوتن.سم ويعمل فى اتجاه م ء جـ



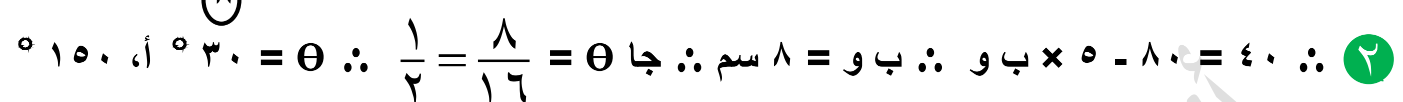
∵ مساحة متوازى الاضلاع = ١٦٠ ∴ ءهـ = ١٠ سم

∵ القوتان (٨ ، ٨) يكونان ازدواج معيار عزمه =٨×١٠ = ٨٠



(١) عند θ = ٦٠° ∴ ب و = ١٦ جا ٦٠ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

∴ معيار عزم الازدواج المكون من القوتين ٥ ، ٥ نيوتن = ٤٠ $\sqrt{٣}$



(٢) ∴ ٤٠ = ٨٠ - ٥ × ب و ∴ ب و = ٨ سم ∴ جا θ = $\frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠° أ، ١٥٠°

[١٣] صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين أ ب جـ فيه أ ب = أجـ ، $\overline{أ ء}$ هو ارتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم رسم مستقيم مواز للقاعدة $\overline{ب جـ}$ ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ فى النقطتين هـ ، و على الترتيب أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب جـ و يقع على $\overline{أ ء}$ ويبعد ٧ سم عن نقطة ء



حاول بنفسك تم حل رقم(٣) فى دليل التقويم

(**بوكلت٣**)

[١٤] فى الشكل المقابل:

أء قضيب مهمل الوزن تؤثر القوى التى مقاديرها

٣ ، ق ، ٥ ، ك نيوتن فى النقط أ ، ب ، جـ ، ء

على الترتيب فى الاتجاهات المبينة فإذا كانت مجموعة القوى تؤول إلى ازدواج القياس الجبرى لعزمه



يساوى ٣٦ نيوتن.سم فاوجد قيمة كل من ق ، ك

∵ المجموعة تؤول الى ازدواج ∴ ح = ٠ ∴ ق + ٥ = ٣ + ك ∴ ق + ٢ = ك ⟸ (١)

، جـء = ٣٦ ∴ -٣× ١٨ + ق×١٢ + ٥ × ٦ =٣٦ ∴ ق = ٥ نيوتن ، ك = ٧ نيوتن

[١٥] وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى إعلى المستوى فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما يكون مقدار هذه القوة يساوى ٣٠ نيوتن ويكون على وشك الحركة لأسفل عندما يكون مقدار هذه القوة يساوى ٢٠ نيوتن

أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى



حاول بنفسك

[١٦] ﻤ ب جـ ء مستطيل فيه ﻤ ب =٦سم ، ب جـ= ٨سم ، هـ ∋ ب جـ حيث ب هـ = ٣سم أثرت قوى مقاديرها ٩ ، ١٢ ، ١٠ ، ٦ $\sqrt{5}$ نيوتن فى الاتجاهات ﻤ ب ، جـ ب ، ﻤ جـ ، هـ ﻤ على الترتيب

❶ أوجد معيار مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول النقطة م حيث م نقطة تقاطع قطرى المستطيل

❷ أوجد معيار مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول النقطة ء



حاول بنفسك

[١٧] تؤثر القوة ق فى النقطة ﻤ(-٣ ، ٢) فإذا كان عزم ق حول كل من النقطتين ب(٣ ، ١) ، جـ(-١ ، ٤) يساوى ٢٨ ع أوجد ق



∵ جب=ججـ=٢٨ ع ∴ ق // ب جـ ∵ ب جـ = (-٤ ، ٣) ∴ نفرض ق =(-٤ك ، ٣ك)

∵ جب=٢٨ ع ∴ ب ﻤ × ق = (-٦ ، ١) × (-٤ك ، ٣ك) ∴ -١٨ك + ٤ك =٢٨

∴ ك = -٢ ∴ ق =(٨ ، -٦)

[١٨] ﻤ ب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن وطوله ٦٠سم يرتكز بطرفه ﻤ على مستوى أفقى خشن ، ويرتكز عند إحدى نقطة جـ على وتد أملس يعلوه ٢٥سم عن المستوى الأفقى ، وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى ٣٠° أوجد رد فعل الوتد وكذلك معامل الاحتكاك بين القضيب والمستوى علماً بأن القضيب يقع فى مستوى رأسى



حاول بنفسك

[١٩] ﻤ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوتان ٦٠ ، ٦٠ نيوتن فى اتجاهات ب ﻤ ، ء جـ ، أوجد قوتين متساويتين فى المقدار تؤثران فى ﻤ ، جـ وخط عملها يوازيان القطر ب ء وتكونان ازدواجاً يتكافئ مع الازدواج المكون من القوتين الأوليين



حاول بنفسك

[٢٠] ﻤ ب قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم و وزنه ١٥ نيوتن يؤثر فى منتصفه ، يرتكز أفقياً على حاملين أحدهما عند ﻤ والآخر عند نقطة جـ على بعد ٣٠ سم من ب

أوجد الثقل الذى يمكن تعليقه من الطرف ب من القضيب

❶ ليكون قيمة رد فعل الحامل عند جـ مساويا خمسة أمثال قيمة رد فعل الحامل عند ﻤ

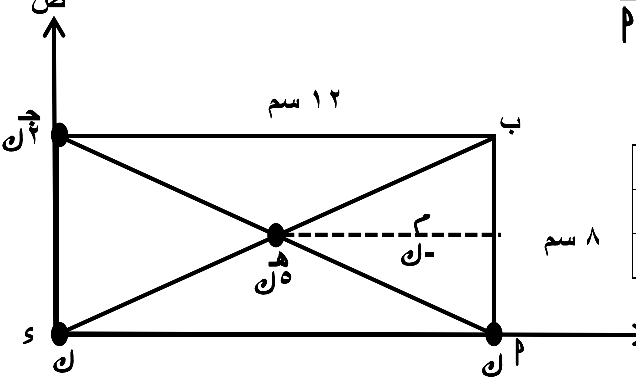
❷ ليكون القضيب على وشك الدوران حول جـ



حاول بنفسك

[٢١] صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة كتلتها ٤ ك على هيئة المستطيل ٢ ب جـ ء الذى فيه ٢ ب=٨سم ، ب جـ = ١٢سم ، وصل قطراه فتقاطعا فى هـ ثم فصل المثلث ٢ ب هـ وثبتت الكتل ك ، ٢ك ، ك ، ك عند الرؤوس ٢ ، جـ ، ء ، هـ على الترتيب

عين بعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $\overline{ء جـ}$ ، $\overline{ء ٢}$



الكتلة	ك	ك	٢ك	٥ك	-ك
س	٠	١٢	٠	٦	١٠
ص	٠	٠	٨	٤	٤

$$س_م = \frac{ك×٠ + ك×١٢ + ٢ك×٠ + ٥ك×٦ - ك×١٠}{٨ك} = ٤$$

$$، س_م = \frac{ك×٠ + ك×٠ + ٢ك×٨ + ٥ك×٤ - ك×٤}{٨ك} = ٤$$

∴ مركز الثقل يبعد ٤سم عن كل من $\overline{ء جـ}$ ، $\overline{ء ٢}$

(بوكلت ٤)

[٢٢] صفيحة رقيقة منتظمة على شكل المربع ٢ ب جـ ء الذى طول ضلعه ٣٠ سم ، م نقطة تقاطع قطريه وقطع Δ م جـ ء ولصق مرة ثانية فوق Δ م ب ٢ أوجد مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد



حاول بنفسك

[٢٣] فى الشكل المقابل:

$\overline{٢هـ}$ ساق خفيفه مهملة الوزن تؤثر فيها

مجموعة القوى التى امامك

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج

واوجد معيار عزمه



∵ ح = ٧ + ٣ - ١ - ٥ - ٤ = ٠ ، جم = ١×١٠ + ٥×١٥ - ٣×٥٠ + ٤×٦٠ = ١٧٥ ≠ ٠

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ١٧٥ وحدة عزم

[٢٤] ﻡ ب جـ سلك منتظم السمك والكثافة طوله ٢٥ سم حيث ق(∠ﻡ ب جـ) = ٩٠° ، ﻡ ب =١٥سم ، ب‌جـ = ١٠سم أوجد بعد مركز ثقل السلك عن الضلعين جـ ب ، ﻡ ب



حاول بنفسك

[٢٥] جسم وزنه ١٠√٣ ث جم موضوع على مستوى مائل خشن ولوحظ أن الجسم على وشك الانزلاق اذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا زيد ميل المستوى الى ٦٠° واثرت على الجسم قوة مقدارها ق ث جم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى تجعل الجسم فى حالة اتزان نهائى

أثبت أن ١٠ ≤ ق ≤ ٢٠ ث جم



حاول بنفسك

[٢٦] جـ ، ء حاملان أملسان البعد بينهما ٤ أمتار ارتكز عليهما قضيب ﻡ ب أفقيا بحيث ﻡجـ = ١ متر وكان الضغط على الحامل جـ = ١٦٠ ث كجم وعندما ارتكز القضيب على نفس الحاملين بحيث ﻡجـ = $\frac{٧}{٤}$ متر وكان الضغط على الحامل جـ = ٢٥٠ ث كجم أوجد وزن القضيب



حاول بنفسك

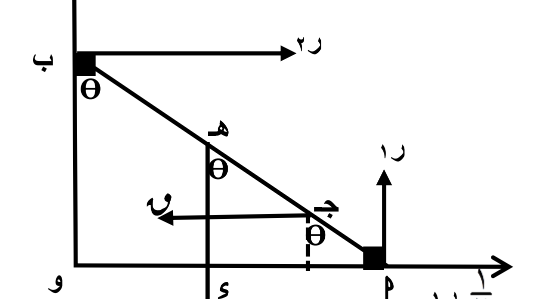
[٢٧] ﻡ ب جـ مثلث قائم الزاويه فى ب فيه ﻡ ب = ٢٠ سم ، ق(∠جـ) = ٣٠° أخذت النقط ء ∈ ﻡب ، هـ ∈ ﻡجـ بحيث كان ﻡء = ﻡهـ = ١٠ سم أثرت القوى $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ ، ٥ ث كجم فى ﻡ ب ، ب‌جـ ، جـﻡ ، ءهـ على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى ١٢٥√٣ ث كجم. سم ويعمل على الدوران فى الاتجاه ﻡ ب جـ

❶ أوجد قيمة $ق_١$ ❷ أوجد قيمة $ق_٢$



حاول بنفسك

[٢٨] ﻡ ب قضيب منتظم طوله ٢٠سم ووزنه ٣٠ نيوتن يرتكز بطرفه ﻡ على مستوى أفقى خشن ويرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس وكان القضيب يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ أثرت قوة أفقيه مقدارها ق نيوتن على القضيب عند نقطة جـ بحيث ﻡجـ =٥سم فكان الطرف ﻡ على وشك الحركه نحو الحائط اثبت أنه إذا كان معامل الاحتكاك بين السلم والأرض الافقيه = $\frac{1}{2}$ فإن ق = ٢٠(١+ ظاθ)



ﻡجـ =٥سم ، ﻡهـ = ١٠ سم

∵ القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

∴ ر١=٣٠ ، ق = $\frac{1}{2}$ ر١ + ر٢ ∴ ق = ر٢ + ١٥ ⇐ (١)

، جﻡ = ٠ ∴ ق × ٥ جتاθ + ٣٠ × ١٠ جاθ - ر٢ × ٢٠ جتاθ = ٠ ÷ ٥جتاθ

∴ ق + ٦٠ ظاθ - ٤ ر٢ = ٠ ⇐ (٢) من (١) ∴ ر٢ = ق – ١٥ بالتعويض فى (٢)

ق + ٦٠ ظاθ - ٤ق + ٦٠ = ٠ ∴ ٣ق = ٦٠ + ٦٠ ظا θ ÷ ٣

∴ ق = ٢٠(١+ ظا θ)

حل آخر : جب=٠ ∴ -ق×١٥جتا θ - ٣٠ × ١٠جا θ + ر١ × ٢٠ جا θ + $\frac{1}{2}$ ر١×٢٠ جتا θ =٠

بالتعويض عن ر١ = ٣٠

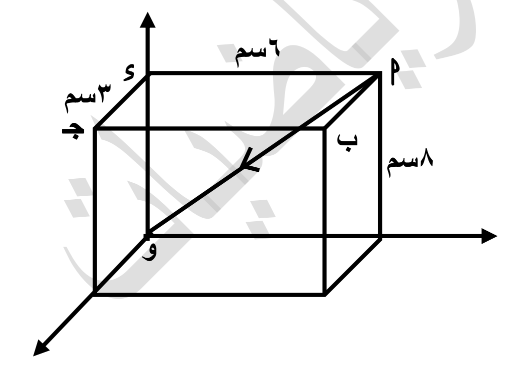
∴ -ق×١٥جتا θ - ٣٠ × ١٠جا θ + ٣٠× ٢٠ جا θ + ١٥×٢٠ جتا θ =٠ ÷ ٥جتاθ

-٣ق - ٦٠ ظا θ + ١٢٠ ظا θ + ٦٠ =٠ ∴ ٣ ق = ٦٠ + ٦٠ ظا θ ÷ ٣

∴ ق = ٢٠(١+ ظا θ)

[٢٩] فى الشكل المقابل: قوة مقدارها ٢٠ نيوتن

تؤثر فى $\overrightarrow{ﻡو}$

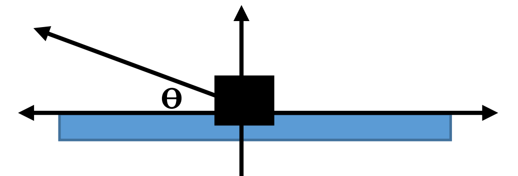


❶ أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ق حول النقطة ب

❷ أوجد القياس الجبرى لعزم القوة $\overrightarrow{ق}$ حول النقطة جـ

حاول بنفسك

[٣٠] إذا كانت θ هى قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى .... (ظاθ ، قا θ ، ظتا θ ، قتا θ)



زاوية الاحتكاك محصورة بين رد الفعل العمودى والمحصل

= ظا(٩٠ – θ) = ظتا θ

[٣١] جسم وزنه ١ كجم ومعامل الاحتكاك السكونى له $\sqrt{٣}$

فإن رد الفعل المحصل ∈ .... ([٠ ، ١] ، [١ ، ٢] ، { ٢ } ، {١ ، ٢})

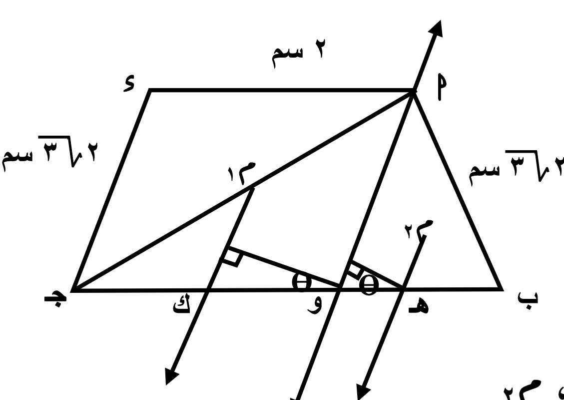
∵ $ر \leq ر´ \leq ر\sqrt{١ + م_{س}^{٢}}$ ∴ $١ \leq ر´ \leq ٢$ ∴ ر´ ∈ [١ ، ٢]

دليل التقويم

[١] ﻡ ب جـ صفيحة منتظمة على شكل شبه منحرف فيه $\overline{ﻡ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ﻡ ء =٢سم ، ﻡب=جـء=٢$\sqrt{٣}$ سم علقت الصفيحة تعليقاً حراً من ﻡ فوجد أن $\overline{جـ ء}$ يكون رأسيا فى وضع الاتزان

أثبت أن جـ ب = ٢ ($\sqrt{٢}$ + ١) سم





بفرض أن $\overleftrightarrow{ﻡ و}$ الخط الراسى المار بنقطة التعليق

∴ $\overleftrightarrow{ﻡ و}$ // $\overline{ء جـ}$ لان $\overline{ء جـ}$ رأسياً

وبتقسيم الشكل الى متوازى أضلاع ومثلث مركزي ثقلهما م١ ، م٢

بفرض طول ب و = س سم ∵ مركز ثقل المثلث هو نقطة تقاطع متوسطاته ∴ هـ منتصف $\overline{ب و}$

، من هندسة الشكل ∴ ك منتصف $\overline{و جـ}$ ، ∴ وك = كجـ = ١سم

∴ مساحة ▱ ﻡ و جـ ء : مساحة Δ ﻡ ب و (لهم نفس الارتفاع) = وجـ : ب و = ٢ : $\frac{١}{٢}$ س = ٤ : س

∴ نفرض كتلة ▱ ﻡ و جـ ء = ٤ ك ، مساحة Δ ﻡ ب و = س ك

∵ الجسم متزن ∴ العزوم حول محور الدوران ينعدم

وعزم قوة حول محور = طول العمود بين خط عمل القوة و المحور × القوة

∴ ٤ك × ١× جتا θ = س ك × $\frac{١}{٢}$ س جتا θ ∴ س^{٢} = ٨ ∴ س = ٢$\sqrt{٢}$

∴ ب جـ = ٢$\sqrt{٢}$ + ٢ = ٢ ($\sqrt{٢}$ + ١)

[٢] قضيب منتظم $\overline{ﻡ ب}$ وزنه ١٥ ث كجم وطوله ٥٤ سم يرتكز بطرفه السفلى ﻡ على حائط رأسى املس ويرتكز عند احدى نقطة جـ على وتد افقى املس مواز للحائط فإذا كان ﻡجـ=١٢سم وكان القضيب متزنا فى مستوى عمودى على الحائط

اثبت أن جيب زاوية ميل القضيب على الحائط هو $\frac{٢}{٣}$ ثم احسب مقدار رد فعل الوتد



حاول بنفسك

[٣] صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين ء ب جـ فيه ء ب = ء جـ ، ء ء هو ارتفاع المثلث وطوله ٤٥ سم ، رسم مستقيم موازٍ للقاعدة ب جـ ويمر بمركز ثقل الصفيحة فقطع ء ب ، ء جـ فى النقطتين هـ ، و على الترتيب

أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب جـ و يقع على ء ء ويبعد ٧سم عن نقطة ء



∵ Δ ء ب جـ متساوى الساقين ∴ ء ء ⊥ ب جـ ، ء منتصف ب جـ

، ء ء ⊥ و هـ ، م منتصف و هـ ∵ هـ و ويمر بمركز ثقل الصفيحة

∴ م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث ∴ ء م = $\frac{٢}{٣}$ × ٤٥ = ٣٠سم



، م َ هى نقطة تقاطع متوسطات Δ ء هـ ء ∴ ء م َ = $\frac{٢}{٣}$ × ٣٠ = ٢٠ سم

∵ و هـ // جـ ب ∴ Δ ء و هـ ~ Δ ء ب جـ

∴ مساحة Δ ء و هـ : مساحة Δ ء ب جـ = (ء م)^{٢} : (ء ء)^{٢} = $\frac{٤}{٩}$

∴ نفرض أن مساحة Δ ء ب جـ = ٩ك ، مساحة Δ ء و هـ = ٤ك

∴ مركز ثقل الشكل الرباعى جـ ب هـ و هو مركز ثقل Δ ء ب جـ بعد رفع Δ ء و هـ

الكتلة	٩ك	ـ ٤ك
س	٣٠	٢٠
ص	٠	٠

∴ $\bar{س} = \frac{٣٠ \times ٩ك + ٢٠ \times -٤ك}{٩ك - ٤ك}$ = ٣٨ ∴ مركز ثقل الشكل الرباعى يبعد عن ء مسافة ٣٨سم

∴ يبعد عن ء مسافة = ٤٥ ـ ٣٨ = ٧سم



[٤] فى الشكل المقابل :

صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث ء ب جـ وزنها ١٥ث جرام

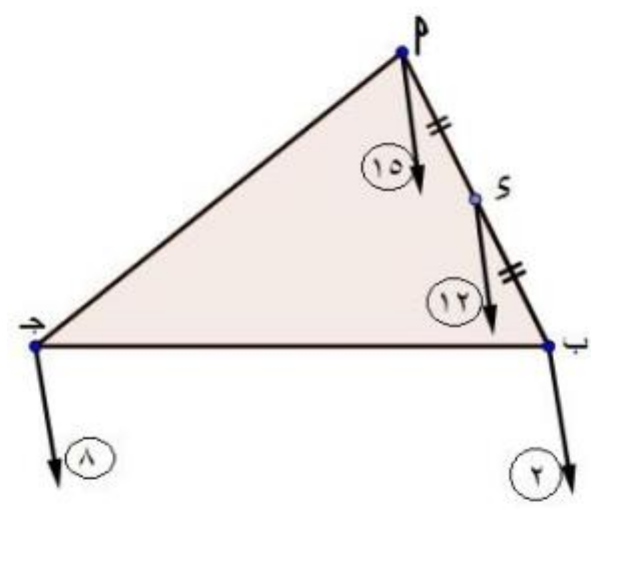
وضعت الاثقال ١٥ ، ٢ ، ٨ ، ١٢ ثقل جرام

كما هو موضح بالشكل فإذا كان م َ هو مركز ثقل المجموعة

فإن ....

(أ) م َ منتصف ء ب   (ب) م َ منتصف ب جـ

(جـ) م َ نقطة تلاقى متوسطات Δ ء ب جـ

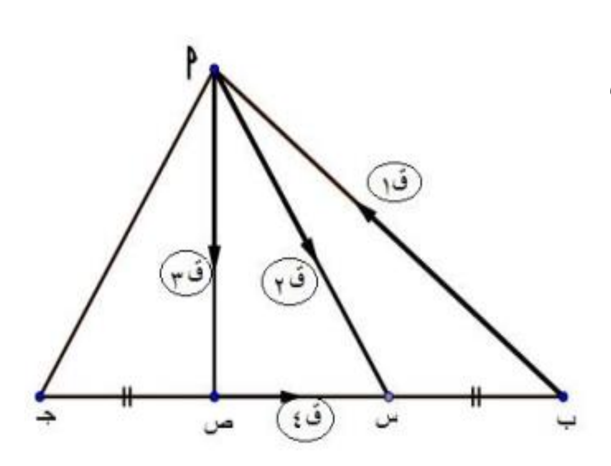


(د) م´ منتصف المتوسط ءهـ



حاول بنفسك

[٥] فى الشكل المقابل



Δءب جـ فيه س، ص نقطتان على $\overline{\text{ب جـ}}$ بحيث ب س = جـ ص

اثرت القوة $ق_1$ ، $ق_2$، $ق_3$، $ق_4$ بحيث يمثلها تمثيلات ما

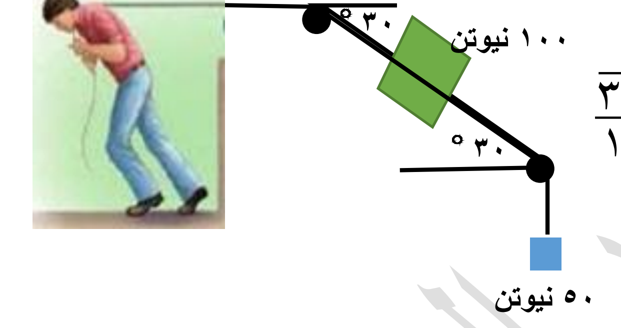
الاضلاع $\overleftarrow{\text{بء}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءس}}$ ، $\overleftarrow{\text{ءص}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ على الترتيب

فإذا كانت القوة غير متزنة

أثبت أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة جـ



[٦] فى الشكل المرسوم



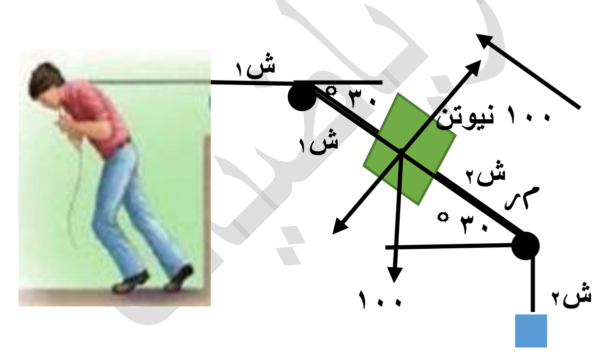
إذا كان معامل الاحتكاك بين الكتلة المستوى المائل يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{١٠}$

فأوجد قيم الشد التى تجعل الجسمين فى حالة اتزان

علما بأن البكرتان ملساوان.



الجسم على وشكل الحركة لاعلى المستوى



$\therefore$ ش٢ = ٥٠ نيوتن ، ر = و جتا٣٠ = ٥٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

ش١ = م ر + و جا٣٠ + ش٢

= $\frac{\sqrt{٣}}{١٠} \times ٥٠\sqrt{٣} + ٥٠ \times \frac{١}{٢} + ٥٠$ = ١٢٥ نيوتن

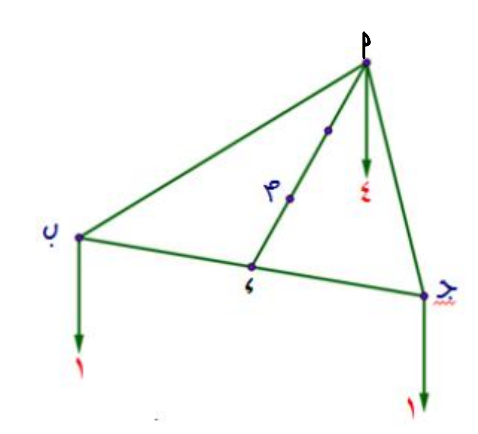
الجسم على وشك الحركة لاسفل

$\therefore$ ش٢ = ٥٠ نيوتن ، ر = و جتا٣٠ = ٥٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

ش١ = ش٢ + و جا٣٠ - م ر = ٥٠+٥٠ - ٥٠ $\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $ش_1$ = ٢٥ نيوتن

لاتنسى تكرار (ش٢) لان الشد على طرفى البكرة الملساء متساوى



[٧] إذا وضعت الأثقال ٤ ، ١ ، ١ ث كجم عند رؤوس المثلث م ب جـ فإن مركز هذه الأوزان هو ....

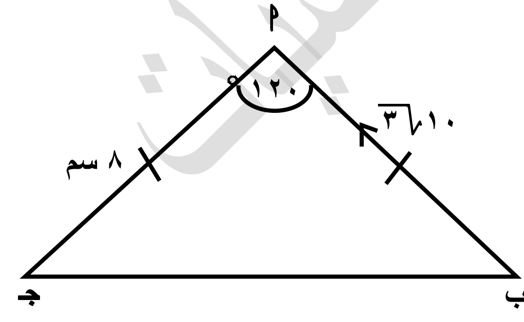
حيث م ء متوسط فى مثلث م ب جـ ، م هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث

(أ) نقطة م (ب) نقطة منتصف م م

(جـ) نقطة ء ، نقطة منتصف م ء



حاول بنفسك



[٨] فى الشكل المقابل م ب جـ مثلث ، م نقطة تلاقى متوسطات △ م ب جـ القوة ق، ق ،٥ق،٣ق قوى متوازية وفى اتجاه واحد تقع خطط عملها فى مستوى المثلث فإذا كان طول المتوسط جـ ء=٣٠سم فإن محصلة هذه القوى تؤثر فى نقطة تبعد عن جـ مسافة = ... سم

(٥، ١٠، ١٥، ١٦)



نلاحظ محصلة القوتين ق ، ق مقدارها ٢ ق وتؤثر فى ء ∴ محصلة القوى ١٠ ق

وبفرض انها تبعد عن جـ مسافة س سم ، مجموع عزوم القوى حول جـ يساوى عزم المحصلة عندها

∴ - ١٠ ق × س =-٢ق × ٣٠ – ٥ق × $\frac{٢}{٣}$ × ٣٠ ∴ س =١٦

[٩] فى الشكل المقابل :م ب جـ مثلث فيه م ب=م جـ ، ق(ب̂)=١٢٠° تؤثر القوة ١٠$\sqrt{٣}$ نيوتن فى ب م فإن القياس الجبرى لعزم القوة ١٠$\sqrt{٣}$ حول النقطة جـ يساوى...... نيوتن.سم

[-٨٠$\sqrt{٣}$ ، ٨٠$\sqrt{٣}$ ، ١٢٠ ، -١٢٠]



العمل نرسم من جـ ⊥ ٍ ب يكون طوله = ٨ جا ٦٠ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

∴ $\overleftarrow{جـ}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ × ٤ $\sqrt{٣}$ = ١٢٠ نيوتن.سم

[١٠] ٍب جـ ء صفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل طول ضلعها ٢٠سم ووزنها٦٠٠ ث جم معلقة بمسار أفقى عند ٍ بحيث يكون مستواها رأسيا.فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٦٠٠٠ث جم.سم .أوجد فى وضع التوازن ميل الصفيحة ٍب على الرأس إذا علم أن وزن الصفيحة يؤثر فى نقطة تقاطع القطرين.



حاول بنفسك

[١١] تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_١}$=٢ $\overleftarrow{سـ}$-٣$\overleftarrow{صـ}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$=٤ $\overleftarrow{سـ}$-٦$\overleftarrow{صـ}$ فى النقطتين ٍ(١ ، ٣) ، ب(٤ ، ٩) على الترتيب فإن نقطة تأثير المحصلة هى...... [(٥ ، ١٢) ، (٥ ، ١٢)، (٢ ، ٥)، (٣ ، ٧)]



|| $\overleftarrow{ق_١}$ ||= $\sqrt{١٣}$ ، || $\overleftarrow{ق_٢}$ || = ٢ $\sqrt{١٣}$

∴ نقطة تاثير المحصلة تقسم ٍ ب بنسبة ٢ $\sqrt{١٣}$: $\sqrt{١٣}$ =٢: ١

∴ نقطة تاثير المحصلة = $\frac{(١ ، ٣) + ٢(٤ ، ٩)}{١ + ٢}$ = (٣ ، ٧)

[١٢] إذا كانت : $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftarrow{ٍب}$ ، جـ ∈ $\overleftrightarrow{ٍب}$ وكان $\overleftarrow{جٍ}$ + $\overleftarrow{جب}$ =١٢ فإن $\overleftarrow{جـ}$ = ...$\overleftarrow{ع}$

(١٢ ، ٦ ، -٦ ، ٤)



∵ $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftarrow{ٍب}$ ∴ $\overleftarrow{جٍ}$ = $\overleftarrow{جب}$ =٦ $\overleftarrow{ع}$ ، ∵ جـ ∈ $\overleftrightarrow{ٍب}$ ∴ $\overleftarrow{ق}$ // $\overleftarrow{جٍ}$ ∴ $\overleftarrow{جـ}$ = $\overleftarrow{جٍ}$ =٦ $\overleftarrow{ع}$

[١٣] إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$=٦ $\overleftarrow{سـ}$+٣$\overleftarrow{صـ}$ وتؤثر فى نقطة ٍ=(١ ، -٣) ، $\overleftarrow{ق_٢}$=-$\overleftarrow{سـ}$-٤$\overleftarrow{صـ}$ وتؤثر فى النقطة ب=(٢ ، ٥) ، $\overleftarrow{ق_٣}$=$\overleftarrow{صـ}$-٥ $\overleftarrow{سـ}$ وتؤثر فى النقطة جـ =(٤ ، -١)

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواج وعين معيار عزمه



∵ $\overleftarrow{ح}$ = $\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$ + $\overleftarrow{ق_٣}$= $\overleftarrow{٠}$ ،

∵ $\overleftarrow{جـ}$= $\overleftarrow{جـٍ}$ × $\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{جـب}$ × $\overleftarrow{ق_٢}$ =(-٣ ، -٢)×(٦ ، ٣) + (-٢ ، ٦) × (-١ ، -٤)

= (-٩ +١٢)$\overleftarrow{ع}$ + (٨ +٦)$\overleftarrow{ع}$ = ١٧ $\overleftarrow{ع}$ ≠ $\overleftarrow{٠}$ ∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه =١٧

[١٤] إذا كانت القوة $\overleftarrow{ق}$= ك $\overleftarrow{سـ}$+٤$\overleftarrow{صـ}$- $\overleftarrow{ع}$ تؤثر فى نقطة ٍ(١ ، ٢ ، ٣) وكان مركبة عزم القوة ق حول محور الصادات يساوى٧وحدة عزم فإن ك=..... (٢ ، -٢ ، ٣ ، -١)

∵ $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ك & ٤ & -١ \end{vmatrix}$ = -١٤ $\overleftarrow{س}$ −(-١ − ٣ك) $\overleftarrow{ص}$ + (٤-٢ك) $\overleftarrow{ع}$

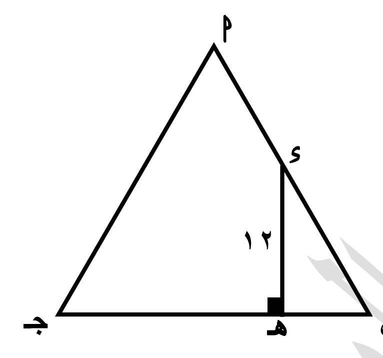
∵ العزم حول محور ص =٧ ∴ ١ + ٣ك = ٧ ∴ ك =٢

[١٥] قضيب منتظم $\overline{أب}$ وزنه ١٥ ث كجم وطولة ٥٤ سم يرتكز بطرفة السفلى أ على حائط رأسى أملس ويرتكز عند احدى نقطة جـ على وتد أفقى أملس مواز للحائط أثبت أن جيب زاوية ميل القضيب على الحائط هو $\frac{٢}{٣}$ ثم احسب مقدار رد فعل الوتد



حاول بنفسك

[١٦] أب جـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، ء منتصف $\overline{أب}$ رسم $\overleftarrow{ءهـ}$ ⊥ $\overleftarrow{بجـ}$ يقطعه فى هـ ، اثرت القوة $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ فى أضلاع المثلث فإذا كانت محصلة هذه القوة تساوى ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن وخط عملها $\overleftarrow{ءهـ}$ أوجد هذه القوة مقدارا واتجاها



ب هـ = ١٠ جتا٦٠ = ٥ سم ، ∴ هـ جـ = ١٥ سم، ءهـ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

، ارتفاع المثلث = ٢٠ جا ٦٠ = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

∵ مجموع عزوم القوى حول نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة

∴ باخذ العزوم حول ب ∴ ١٢ $\sqrt{٣}$ × ٥ = $ق_٢$ × ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ $ق_٢$ = ٦ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أجـ}$

بالمثل باخذ العزوم حول جـ ∴ -١٢ $\sqrt{٣}$ × ١٥ = $ق_١$ × ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ $ق_١$ = ١٨ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$

باخذ العزوم حول أ ونرسم عمود من ء على $\overline{أجـ}$ فيكون طوله ١٠ جا ٦٠ = ٥ $\sqrt{٣}$ سم

∴ ٠ = $ق_٣$ × ٥ $\sqrt{٣}$ + ١٨×٥ $\sqrt{٣}$ ∴ $ق_٣$ = ٦ نيوتن وتعمل فى $\overleftarrow{بجـ}$

[١٧] إذا كانت أ، ب ، جـ ثلاث نقط مستوية لا تقع على استقامة واحدة ،أثرت مجموعة من القوى فى مستويها بحيث كان $\overleftarrow{ج_أ}$ = $\overleftarrow{ج_ب}$= $\overleftarrow{ج_جـ}$= صفر فإن.....

(أ) المحصلة = صفر (ب) القوى متعامدة (جـ) القوى متزنة (د) القوى متوازية

∵ الثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ، $\overleftarrow{جم} = \overleftarrow{جب} = \overleftarrow{جـجـ} =$ صفر ∴ القوى متزنة

[١٨] مب جـ صفيحة رقيقة على شكل مثلث قائم الزاوية فى ب حيث مب=١٨سم ، ب جـ =٢٤سم ، وزنها٥٠٠ ث جم يؤثر فى نقطة تقاطع متوسطات المثلث. علقت الصفيحة تعليقا حرا فى مسمار أفقى من الرأس م بحيث كان مستواها رأسيا. **أوجد** معيار عزم الازدواج الذى يجعل $\overline{مب}$ أفقيا.



مجـ = ٣٠ سم ∴ بء =١٥سم ،

$ب م = \frac{٢}{٣} \times ١٥ = ١٠$سم

فى Δ مهـ ب ، جتا(∠م ب هـ) = جا جـ = $\frac{١٨}{٣٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ ب هـ = ١٠× $\frac{٣}{٥}$ = ٦سم   ∴ مهـ = ١٨ – ٦ = ١٢سم

∵ الازدواج لا يتزن الا مع ازدواج آخر

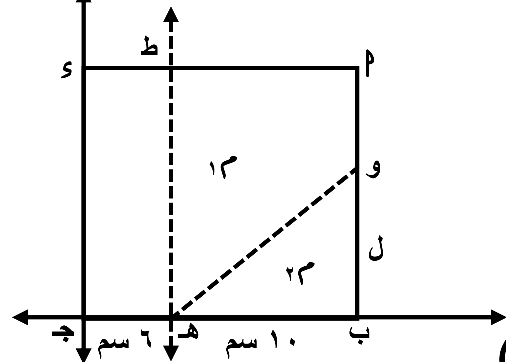
∴ (٥٠٠ ، ر) يكونان ازواج معيار عزمه يساوى معيار عزم الازدواج المطلوب

= ٥٠٠ × ١٢ = ٦٠٠٠ ث جم . سم

كتاب المدرسة

[١] صفحية رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل ٢ ب جـ ء فيه ٢ب=٢٥سم ، ب جـ =١٦سم فرضت نقطة هـ ∈ ب جـ ، و ∈ ٢ب بحيث بهـ = ١٠سم ، ثم فصل Δ ب هـ و ووضعت الصفيحة فى مستوى رأسى بحيث انطبق حرفها جـهـ على نضد أفقى أملس فكانت الصفيحة على وشك الدوران حول هـ ، أوجد طول ب و





$$\frac{\text{مساحة المستطيل ٢ ب جـ ء}}{\text{مساحة Δ ب هـ و}} = \frac{٢٥\times١٦}{\frac{١}{٢}\times١٠\times ل} = \frac{٨٠}{ل}$$

نفرض كتلة المستطيل = ٨٠ ك ، كتلة Δ = ل ك

∵ الجسم على وشك الدوران حول هـ (كأن هـ هى نقطة التعليق)

∴ الاحداثى السينى لمركز الثقل =٦ ∴ م١ =(٨ ، $\frac{٢٥}{٢}$) ، ب(١٦ ، ٠) ، هـ(٦ ، ٠) ، و(١٦، ل)

∴ م٢ =($\frac{٦+١٦+١٦}{٣}$ ، $\frac{٠+٠+ل}{٣}$) = ($\frac{٣٨}{٣}$ ، $\frac{ل}{٣}$)

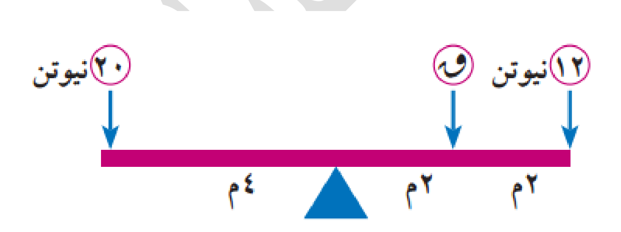
$$س_م = \frac{٨٠ك\times٨ - ل ك\times\frac{٣٨}{٣}}{٨٠ك - ل ك} = ٦$$ ∴ ل = ٢٤ ∴ ب و = ٢٤سم

حل آخر:

∵ الجسم على وشك الدوران حول هـ ∴ مركز ثقل المجموعة يقع على الخط المستقيم المار بـ هـ

∴ العزوم حول هـ = ٠ وملاحظة الصفيحة رأسية وكان جـ هـ أفقى ∴ الاوزان راسية عمودية على جـ هـ ∴ ٨٠ك × (٨-٦) + ل ك ×($\frac{٣٨}{٣}$-٦) = ٠ ÷ ك ∴ ٨٠ × ٢ + ل × $\frac{٢٠}{٣}$ = ٠ ∴ ل =-٢٤

[٢] (اختبار١) الشكل المقابل يمثل قضيب فى حالة اتزان فإن ق = ... نيوتن (٢٨ ، ١٦ ، ٢ ، ٤)



باخذ العزوم حول نقطة الارتكاز (لوجود رد الفعل)

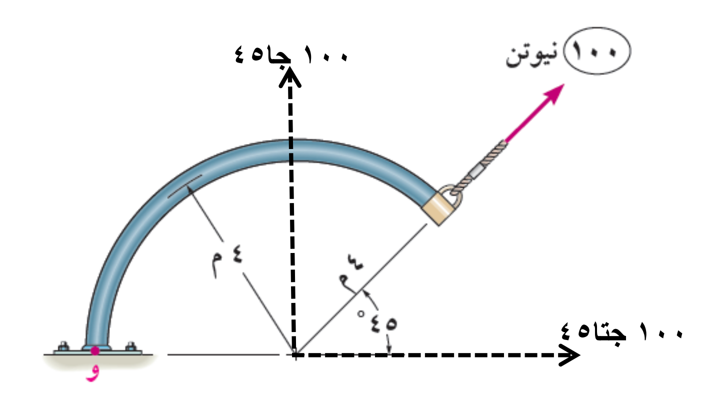
∴ ٢٠ × ٤ - ١٢×٤- ق × ٢ =٠ ∴ ق =١٦

[٣] فى الشكل المقابل:

أوجد القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن حول و



بتحليل القوة الى مركبتين



∴ $ج_و$ = ١٠٠جتا٤٥ × ٠ + ١٠٠ جا٤٥ × ٤

= ٢٠٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن.متر

[٤] فى الشكل المقابل

أوجد عزم القوة ق = ١٥ $\sqrt{١١}$ نيوتن حول نقطة و



من هندسة الشكل احداثيات النقط

ا(٠ ، ٠ ، ١٥) ، ب(-٥ ، ٥ ، ٠) ، و(٠ ، ٠ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{اب}$ =(-٥ ، ٥ ، -١٥) ، $\overrightarrow{وا}$ =(٠ ، ٠ ، ١٥)

$$\overrightarrow{ق} = ق \times \frac{\overrightarrow{اب}}{\|\overrightarrow{اب}\|} = ١٥\sqrt{١١} \times \frac{(-٥ ، ٥ ، -١٥)}{\sqrt{٢٥+٢٥+٢٢٥}} = (-١٥ ، ١٥ ، -٤٥)$$

$$\overrightarrow{ج_و} = \overrightarrow{وا} \times \overrightarrow{ق} = \begin{vmatrix} \hat{س} & \hat{ص} & \hat{ع} \\ ٠ & ٠ & ١٥ \\ -١٥ & ١٥ & -٤٥ \end{vmatrix} = -١٥(١٥\ \hat{س} + ١٥\ \hat{ص}) = -٢٢٥\ \hat{س} - ٢٢٥\ \hat{ص}$$

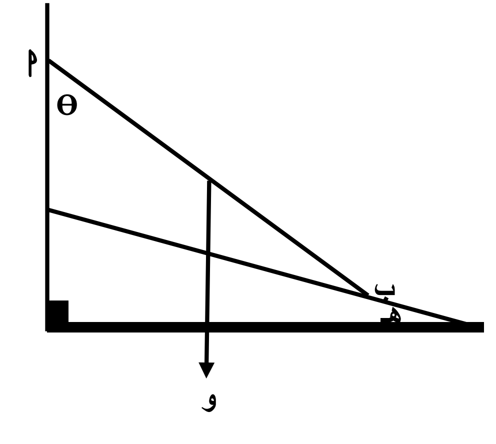


[٥] فى الشكل المقابل ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم

وزنه (و) على حائط رأسى أملس وترتكز النهاية الاخرى على ارض

خشنة تميل على الافقى بزاوية قياسها (هـ) لأعلى فإذا كان السلم

على وشك الانزلاق و هو فى مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع

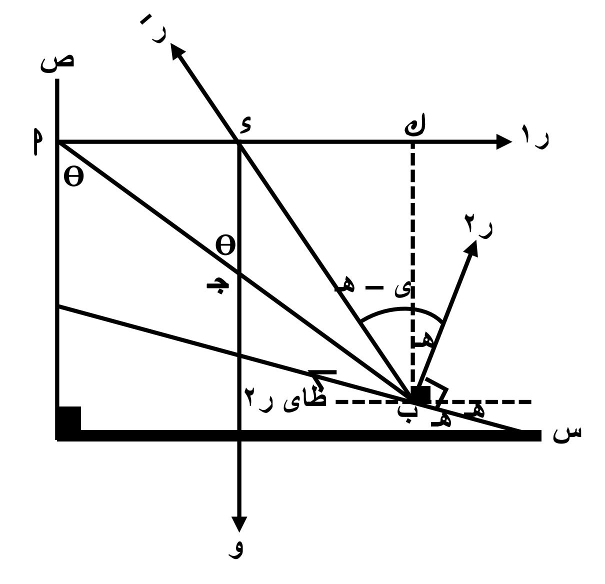


الحائط مع الارض

أثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ حيث

ظاθ = ٢ظا (ى – هـ) حيث ى زاوية الاحتكاك





∵ الجسم متزن تحت تاثير ثلاث قوى

تقاطع خط عمل قوة الوزن ورد الفعل العمودى على الحائط

∴ رد فعل المستوى الخشن يمر بنقطة التقاطع

(ى) محصورة بين رد الفعل العمودى على المستوى

ورد الفعل المحصل ∴ ق(∠ك ب ء) = ى – ء

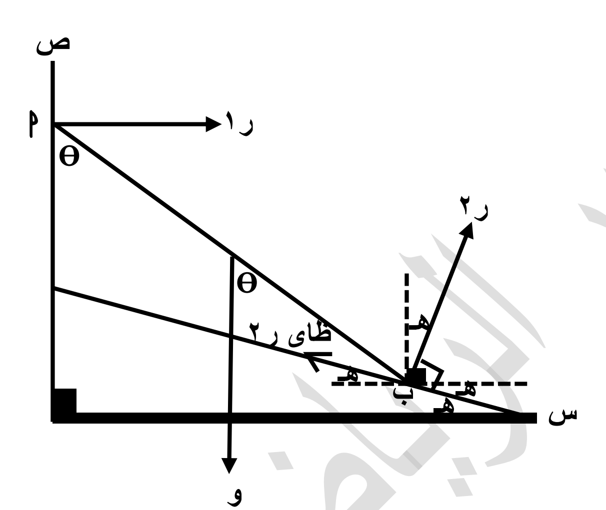
∴ ظا(ى – هـ) = $\frac{كء}{كب}$ ⇐ (١) ،

∵ أء = ءك ، ءجـ = $\frac{1}{2}$ ك ب ، ظا θ = $\frac{أء}{ءجـ}$ = $\frac{كء}{\frac{1}{2}كب}$ ⇐ (٢) من (١) ، (٢)

∴ ظاθ = ٢ظا (ى – هـ)



حل اخر:



بتحليل مركبتى رد فعل المستوى الخشن عند ب

وبفرض طول السلم = ٢ل

، ∵ السلم متزن ∴ $ر_٢$ جتاهـ + ظاى $ر_٢$ جاهـ = و

∴ $ر_٢$ = $\frac{و}{جتاهـ+جاهـظاى}$ ⇐ (١)

، $ر_١$ + $ر_٢$ جاهـ = ظاى $ر_٢$ جتاهـ ∴ $ر_١$ = $ر_٢$ (ظاى جتا هـ - جا هـ) ⇐ (٢)

$ج_ب$=٠ ∴ و × ل جاθ – $ر_١$ × ٢ل جتا θ = ٠ ÷ ل جتا θ

∴ و ظا θ – ٢$ر_١$ =٠ ∴ $ر_١$ = $\frac{1}{2}$ و ظا θ ⇐ (٣) من (١) ، (٣) بالتعويض فى (٢)

∴ $\frac{1}{2}$ و ظا θ = $\frac{و}{جتاهـ+جاهـظاى}$ (ظاى جتا هـ - جا هـ) ÷ و

∴ ظا θ (جتاهـ + جا هـ ظاى) = ٢ (ظاى جتاهـ - جاهـ)

$$\therefore \text{ظا}\,\theta = \frac{٢\left(\frac{\text{جاي}}{\text{جتاي}}\times\text{جتاهـ}-\text{جاهـ}\right)}{\text{جتاهـ}+\text{جاهـ}\times\frac{\text{جاي}}{\text{جتاي}}} = \frac{٢(\text{جاي}\times\text{جتاهـ}-\text{جتاي جاهـ})}{\text{جتاي جتاهـ}+\text{جاهـ}\times\text{جاي}} = \frac{٢\,\text{جا}(\text{ي}-\text{هـ})}{\text{جتا}(\text{ي}-\text{هـ})}$$

= ٢ ظا (ى – هـ)

مصادر أخرى

[١] $\overline{\text{ا ب}}$ قضيب منتظم وزنه ٧٥ ث جم وطوله ٨٠ سم يدور بسهولة حول مسمار ثابت أفقى يمر بثقب صغير عند جـ حيث ب جـ = ٢٠ سم فإذا استند القضيب على سطح أفقى أملس بطرفة ا

أوجد مقدار رد فعل كلا من السطح الافقى والمسمار

وإذا شد الطرف ب بقوة أفقية ق ث جم حتى أصبح رد فعل المستوى الافقى مساويا وزن القضيب وكان القضيب يميل على الافقى بزاوية ٣٠° أوجد مقدار ق ورد فعل المسمار حينئذ



قبل شد القضيب بالقوة الافقية:

∵ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى اثنين منهم

متوازيين فإن الثالثة لابد أن توازيهم

∴ ر~ا~ + ر~جـ~ = ٧٥

، جم = ٠ ∴ ٧٥×٤٠ جتا ٣٠ – ر~جـ~ × ٦٠ جتا ٣٠ =٠

ر~جـ~ = ٥٠ ث جم ، ر~ا~ = ٧٥ - ٥٠ = ٢٥ ث جم


بعد شد القضيب بقوة أفقية:

∵ القضيب متزن ، القوتان (٧٥ ، ٧٥) يكونان

ازدواج معيار عزمه =٧٥ × ٤٠ جتا٣٠=١٥٠٠√٣

∴ ق ، ر~جـ~ يكونان ازدواج معيار عزمه =١٥٠٠√٣

∴ ١٥٠٠√٣ = ق × ٢٠ جا ٣٠ ∴ ق = ١٥٠√٣ ث جم

[٢] $\overrightarrow{\text{ق}_١}$ =٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ -٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢}$ =٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ -٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٣}$ =٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$ -٦ $\overrightarrow{\text{س}}$ تؤثر فى النقط

ا(٢،١) ، ب(-٥ ، ٣) ، جـ (٤ ، -٢) **أثبت أن** القوى تكافئ ازدواج وأوجد معيار عزمه



∵ $\overrightarrow{\text{ح}} = ٤\,\overrightarrow{\text{س}} - ٥\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٢\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٨\,\overrightarrow{\text{ص}} - ٦\,\overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{٠}$ ⇐ (١)

، $\overrightarrow{\text{جـ}}_{\text{و}} = \overrightarrow{\text{وأ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_{١} + \overrightarrow{\text{وب}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_{٢} + \overrightarrow{\text{وجـ}} \times \overrightarrow{\text{ق}}_{٣}$

=(٢، ١)×(٤ ، -٥) +(-٥ ، ٣)×(٢ ، -٣) + (٤ ، -٢)×(-٦ ، ٨)

=(-١٠-٤) $\overrightarrow{\text{ع}}$ + (١٥-٦) $\overrightarrow{\text{ع}}$ + (٣٢-١٢) $\overrightarrow{\text{ع}}$ = ١٥ $\overrightarrow{\text{ع}} \neq \overrightarrow{٠}$ ⇐ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه =١٥ وحدة عزم